固有値問題

$Au = \lambda u \quad \cdots$①

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$の固有値問題

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$　λ:固有値　$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$が固有ベクトル

展開整理して

$(1-\lambda)x + 2y = 0 \quad \cdots$②

$2x + (1-\lambda)y = 0$

yを消去

$\{(1-\lambda)^2 - 4\}x = 0$

x、y共に0にならない解を求めているので、

$(1-\lambda)^2 - 4 = 0$から$\lambda = -1$、3

②に代入して

$\lambda = -1$ のとき、$x = -y$なので、$(x, y) = (k, -k)$

$\lambda = 3$のとき、$x = y$なので、$(x, y) = (k, k)$

$k \neq 0$として

$\lambda = -1$ のとき　$u = u_1 = \begin{pmatrix} k \\ -k \end{pmatrix}$

$\lambda = 3$のとき　$u = u_2 = \begin{pmatrix} k \\ k \end{pmatrix}$

異なる固有値に対するベクトルは直交するので

$u_1 \cdot u_2 = k^2 - k^2 = 0$

固有ベクトルは規格化(大きさが1)しておく

$|u_1| = 1$

$k = \frac{1}{\sqrt{2}}$とすると$u_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$　　$u_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

スペクトル分解

$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$を固有ベクトルで展開する

$\lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = 3 \quad u_1 = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ を代入して

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix} = \lambda_1\, u_1\, {}^t u_1 + \lambda_2\, u_2\, {}^t u_2$$

$$= (-1)\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

一般的に、対称行列Aの異なる固有値をλ_1、λ_2 $\lambda_3 \cdots$、規格化された固有ベクトルをu_1、u_2 $u_3 \cdots$、とすると対称行列Aは、以下のように展開される

$$A = \lambda_1\, {}^t u_1 u_1 + \lambda_2\, {}^t u_2 u_2 + \lambda_3\, {}^t u_3 u_3 + \cdots$$