最尤推定法

多変量正規分布

$$f=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^N\frac{1}{\sqrt{|\Sigma|}}e^{-\frac{1}{2}D^2}\qquad D^2={}^tX\Sigma^{-1}X$$

Σ: 分散共分散行列の理論値
$|\Sigma|$: その行列式
Σ^{-1} : 逆行列
X: 偏差を成分とする列ベクトル
${}^tX$: 偏差を成分とする行ベクトル
μ_x、μ_y : xとyの平均値

2変量のとき $\Sigma=\begin{pmatrix}{\sigma_x}^2 & \sigma_{xy}\\ \sigma_{xy} & {\sigma_y}^2\end{pmatrix}$ $\quad X=\begin{pmatrix}x-\mu_x\\ x-\mu_y\end{pmatrix}$

$$L=f_1\,f_2\cdots f_n$$
$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^N\frac{1}{\sqrt{|\Sigma|}}e^{-\frac{1}{2}{D_1}^2}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^N\frac{1}{\sqrt{|\Sigma|}}e^{-\frac{1}{2}{D_2}^2}\cdots\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^N\frac{1}{\sqrt{|\Sigma|}}e^{-\frac{1}{2}{D_n}^2}$$
$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^{Nn}\left(\frac{1}{\sqrt{|\Sigma|}}\right)^n e^{-\frac{1}{2}\left({D_1}^2+{D_2}^2+\cdots+{D_n}^2\right)}$$

←尤度関数（パラメータを決める確率密度関数）
最大値を求める

$$f_{ML}=tr(\Sigma^{-1}S)-ln|\Sigma^{-1}S|-N$$

←適合度関数

⇩

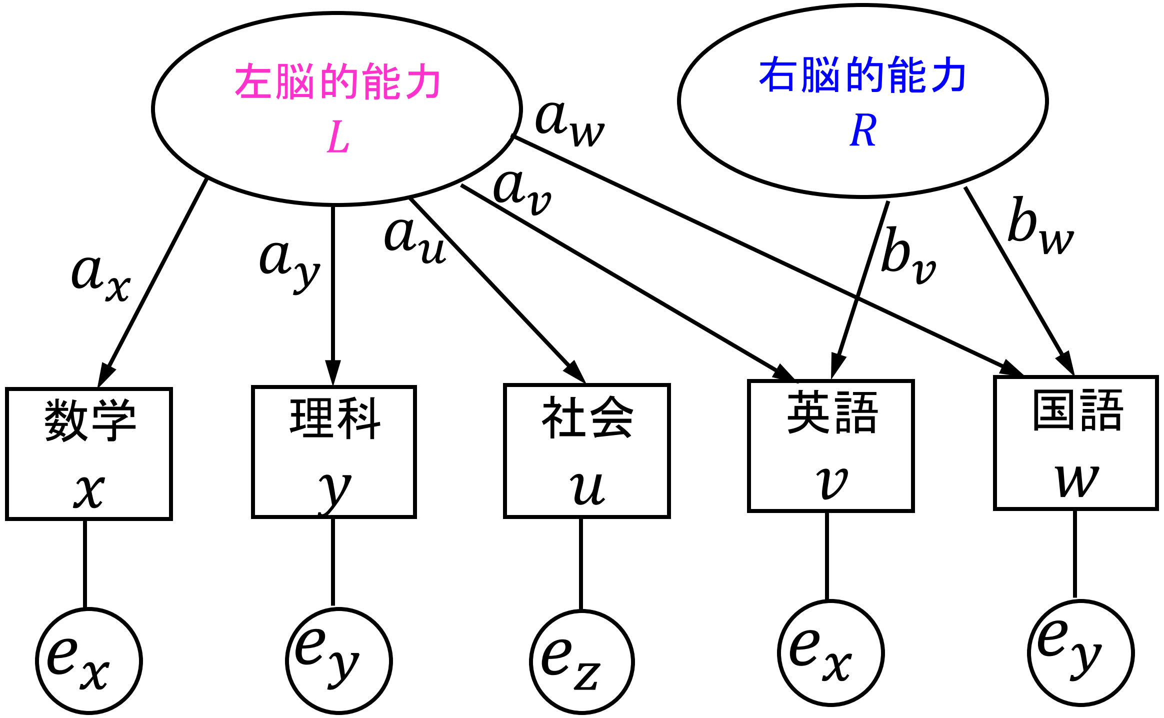
最小にするパラメータを決定

tr（トレース）:行列の対角成分の和を求める記号
S: 分散共分散行列

左脳的能力　　右脳的能力

$x = a_x L + e_x \quad y = a_y L + e_y \quad u = a_u L + e_u$

$v = a_v L + b_v R + e_v \quad w = a_w L + b_w R + e_w$



実測値の分散・共分散行列S

$$S = \begin{bmatrix} 1.000 & 0.866 & 0.838 & 0.881 & 0.325 \\ 0.866 & 1.000 & 0.810 & 0.809 & 0.273 \\ 0.838 & 0.810 & 1.000 & 0.811 & 0.357 \\ 0.881 & 0.809 & 0.811 & 1.000 & 0.444 \\ 0.325 & 0.273 & 0.357 & 0.444 & 1.000 \end{bmatrix}$$

分散・共分散行列Σ

$$\begin{bmatrix} {a_x}^2 + V(e_x) & a_x a_y & a_x a_u & a_x a_v & a_x a_w \\ a_x a_y & {a_y}^2 + V(e_y) & a_y a_u & a_y a_v & a_y a_w \\ a_x a_u & a_y a_u & {a_u}^2 + V(e_u) & a_u a_v & a_u a_w \\ a_x a_v & a_y a_v & a_u a_v & {a_v}^2 + {b_v}^2 + V(e_v) & a_v a_w + b_v b_w \\ a_x a_w & a_y a_w & a_u a_w & a_v a_w + b_v b_w & {a_w}^2 + {b_w}^2 + V(e_w) \end{bmatrix}$$

S		数学	理科	社会	英語	国語
		x	y	u	v	w
数学	x	1.00	0.87	0.84	0.88	0.32
理科	y	0.87	1.00	0.81	0.81	0.27
社会	u	0.84	0.81	1.00	0.81	0.36
英語	v	0.88	0.81	0.81	1.00	0.44
国語	w	0.32	0.27	0.36	0.44	1.00

変量数N	5

	a	b	V(e)
x	0.962	0.000	0.075
y	0.904	0.000	0.183
u	0.880	0.000	0.225
v	0.912	0.338	0.054
w	0.338	0.389	0.734

Σ

1.000	0.869	0.846	0.877	0.325
0.869	1.000	0.796	0.824	0.306
0.846	0.796	1.000	0.803	0.298
0.877	0.824	0.803	1.000	0.440
0.325	0.306	0.298	0.440	1.000

$$\begin{bmatrix} a_x{}^2+V(e_x) & a_xa_y & a_xa_u & a_xa_v & a_xa_w \\ a_xa_y & a_y{}^2+V(e_y) & a_ya_u & a_ya_v & a_ya_w \\ a_xa_u & a_ya_u & a_u{}^2+V(e_u) & a_ua_v & a_ua_w \\ a_xa_v & a_ya_v & a_ua_v & a_v{}^2+b_v{}^2+V(e_v) & a_va_w+b_vb_w \\ a_xa_w & a_ya_w & a_ua_w & a_va_w+b_vb_w & a_w{}^2+b_w{}^2+V(e_w) \end{bmatrix}$$

Σ^{-1}

7.072	−2.398	−1.897	−2.802	0.231
−2.398	4.540	−0.737	−1.088	0.090
−1.897	−0.737	3.862	−0.861	0.071
−2.802	−1.088	−0.861	5.437	−0.892
0.231	0.090	0.071	−0.892	1.269

=MINVERSE(C18:G22)

Σ^{-1}S

1.000	0.010	−0.086	0.044	−0.069
0.004	1.000	0.077	−0.078	−0.196
−0.029	0.063	1.000	0.032	0.277
0.027	−0.060	−0.013	1.000	0.000
−0.010	−0.031	0.072	0.000	1.000

=MMULT(C25#,C3:G7)

TrΣ^{-1}S	5.000	$\lvert\Sigma^{-1}S\rvert$	0.9591

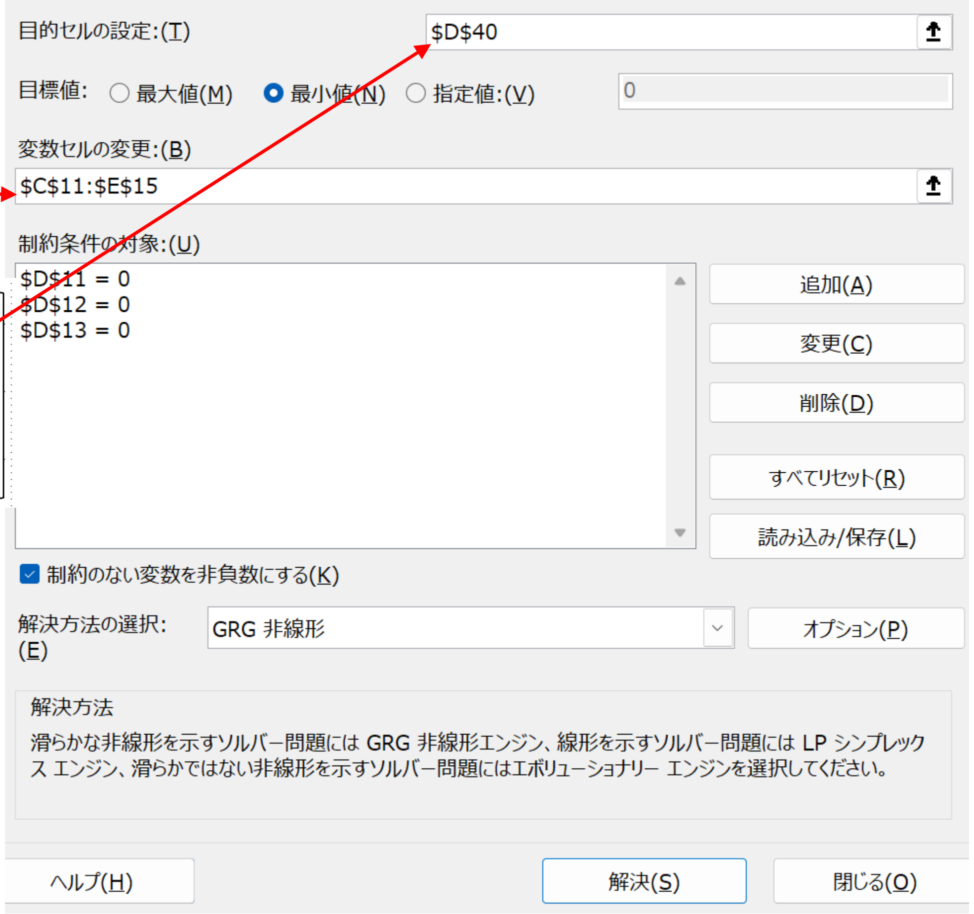
=MDETERM(C32#) 行列式

f_{ML}	0.042

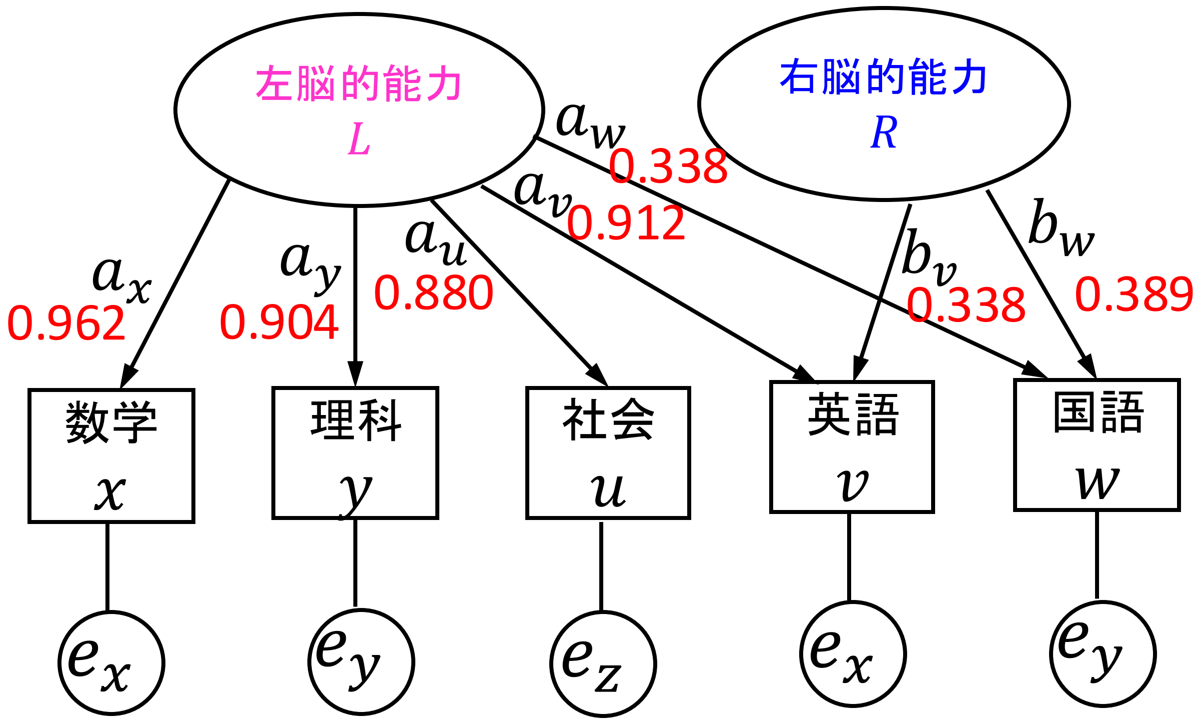
最小にする

$$f_{ML} = tr(\Sigma^{-1}S) - ln|\Sigma^{-1}S| - N$$ ←適合度関数

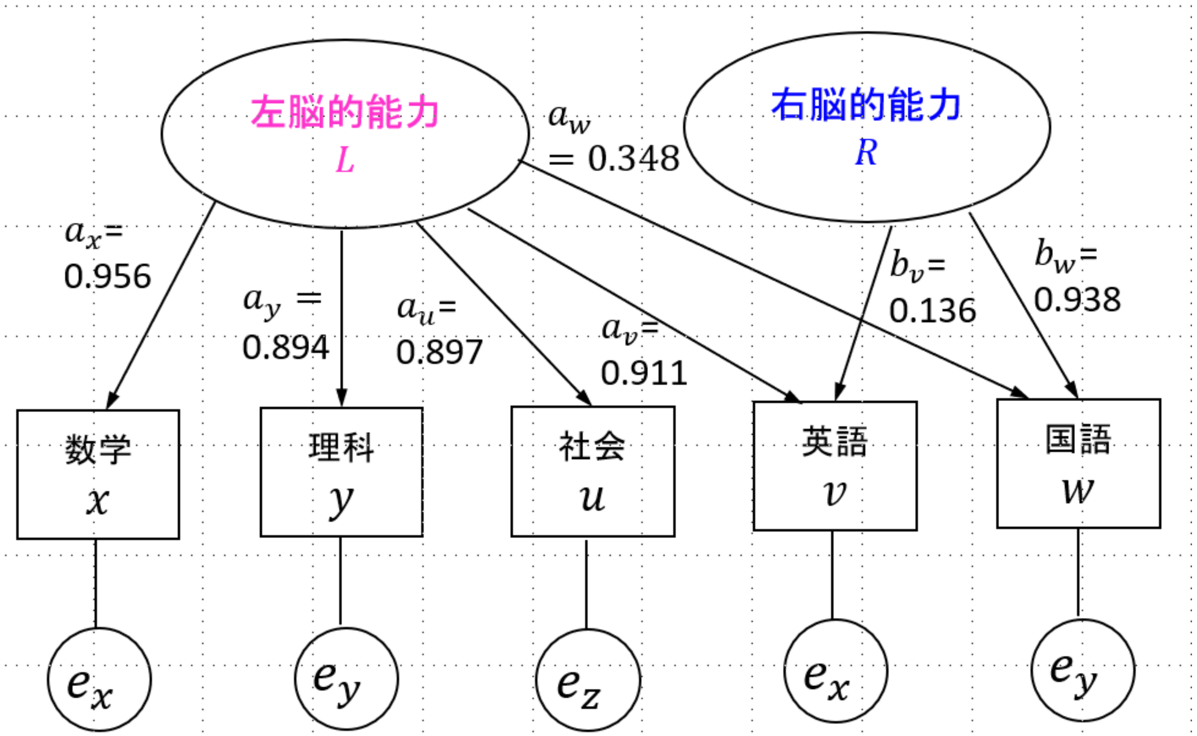
Excelのソルバー



最尤推定法


左脳的能力
L
右脳的能力
R
a_x 0.962
a_y 0.904
a_u 0.880
a_v 0.912
a_w 0.338
b_v 0.338
b_w 0.389
数学 x
理科 y
社会 u
英語 v
国語 w
e_x
e_y
e_z
e_x
e_y

最小二乗法


左脳的能力
L
右脳的能力
R
a_x= 0.956
a_y = 0.894
a_u= 0.897
a_v= 0.911
a_w = 0.348
b_v= 0.136
b_w= 0.938
数学 x
理科 y
社会 u
英語 v
国語 w
e_x
e_y
e_z
e_x
e_y

$$L = f_1\, f_2 \cdots f_n$$
$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^N \frac{1}{\sqrt{|\Sigma|}} e^{-\frac{1}{2}{D_1}^2} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^N \frac{1}{\sqrt{|\Sigma|}} e^{-\frac{1}{2}{D_2}^2} \cdots \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^N \frac{1}{\sqrt{|\Sigma|}} e^{-\frac{1}{2}{D_n}^2}$$
$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^{Nn} \left(\frac{1}{\sqrt{|\Sigma|}}\right)^n e^{-\frac{1}{2}({D_1}^2+{D_2}^2+\cdots+{D_n}^2)}$$

$$lnL = -\frac{1}{2}{}^tX_1\Sigma^{-1}\ X_1 - \frac{1}{2}{}^tX_2\Sigma^{-1}\ X_2 - \cdots - \frac{1}{2}{}^tX_n\Sigma^{-1}\ X_n - \frac{n}{2}ln|\Sigma|$$
$$-lnL = \frac{1}{2}{}^tX_1\Sigma^{-1}\ X_1 + \frac{1}{2}{}^tX_2\Sigma^{-1}\ X_2 + \cdots + \frac{1}{2}{}^tX_n\Sigma^{-1}\ X_n + \frac{n}{2}ln|\Sigma|$$

←マイナスを両辺に掛けて最大値から
最小値問題に変換

$${}^tXAX = tr(A{}^tXX)$$

$$-lnL = \frac{1}{2}tr\Sigma^{-1}{}^tX_1\ X_1 + \frac{1}{2}tr\Sigma^{-1}{}^tX_2\ X_2 + \cdots + tr\Sigma^{-1}\frac{1}{2}{}^tX_n\ X_n + \frac{n}{2}ln|\Sigma|$$

$$tr(A) + tr(B) == tr(A+B)$$

$$-lnL = \frac{n}{2}tr\Sigma^{-1}\frac{1}{n}\{{}^tX_1\ X_1 + {}^tX_2\ X_2 + \cdots + {}^tX_n\ X_n\} + \frac{n}{2}ln|\Sigma|$$
$$= \frac{n}{2}tr\Sigma^{-1}S + \frac{n}{2}ln|\Sigma|$$

$$S = \frac{1}{n}\{{}^tX_1\ X_1 + {}^tX_2\ X_2 + \cdots + {}^tX_n\ X_n\}$$

$$\Sigma\Sigma^{-1} = E \qquad |\Sigma|\,|\Sigma^{-1}| = 1$$

$$-lnL = \frac{n}{2}tr\Sigma^{-1}S - \frac{n}{2}ln|\Sigma^{-1}|$$

$$-lnL = tr\Sigma^{-1}S - ln|\Sigma^{-1}| - ln|S| - N = \mathrm{f}_{ML}$$

$\frac{n}{2}$は最小値問題に影響しない、χ^2検定できるように最小値問題に影響しない補正項$ln|S| + N$を差引く