オッズ比の95%信頼区間算出式

標本のオッズ比 $\theta = \dfrac{a/c}{b/d} = \dfrac{ad}{bc}$

母集団のオッズ比ψとすると
対数オッズ$log(\theta)$の期待値は$log(\psi)$に等しい

母対数オッズ比が平均$log(\theta)$、分散$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$の正規分布で近似できるので、

$$log(\theta) - 1.96\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}} \leq log(\psi) \leq log(\theta) + 1.96\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}$$

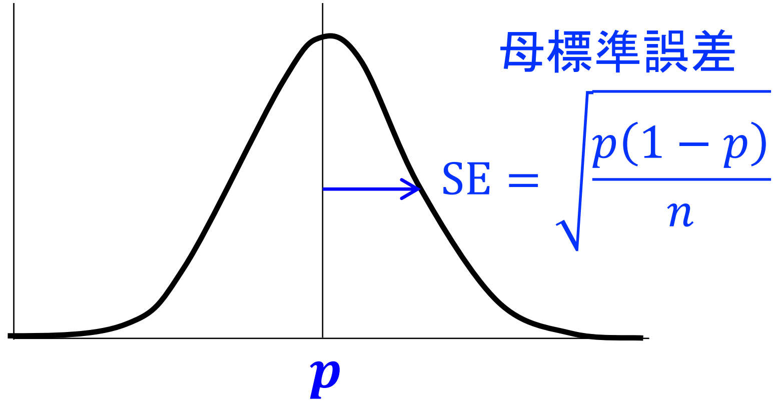
母集団のオッズ比ψの95%信頼区間は、

$$\theta \times exp\left[-1.96\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}\right] \leq \psi \leq \theta \times exp\left[1.96\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}\right]$$

オッズ比の母標準誤差を求める

成功確率pである試行をn回行うときに成功する回数をXとすると、Xは二項分布$B(n,p)$に従い、
標本比率$\hat{p}=\frac{X}{n}$の平均$E[\hat{p}]$と分散$V[\hat{p}]$は、

$$E[\hat{p}]=p \qquad V[\hat{p}]=\frac{p(1-p)}{n}$$



$f(p)=log\frac{p}{1-p}$とすると、$p=\hat{p}$の周りの$f(p)$の分散は、

$$V[f(p)]\approx[f'(\hat{p})]^2\,V[p]\approx[f'(\hat{p})]^2\,V[\hat{p}]$$

ここで、

$$f'(p)=\frac{d}{dp}log\frac{p}{1-p}=\frac{d}{dp}[logp-log(1-p)]=\frac{1}{p}+\frac{1}{1-p}=\frac{1}{p(1-p)}$$

$$V[f(p)]\approx\left[\frac{1}{\hat{p}(1-\hat{p})}\right]^2V[\hat{p}]=\left[\frac{1}{\hat{p}(1-\hat{p})}\right]^2\frac{p(1-p)}{n}\approx\left[\frac{1}{\hat{p}(1-\hat{p})}\right]^2\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}=\frac{1}{n\hat{p}(1-\hat{p})}$$

n回の試行における確率$\hat{p}=\frac{n_1}{n}$　　n_1:イベント数　　n_0:非イベント数

対数オッズの分散は、

$$V[\log Odds]=\frac{1}{n\hat{p}(1-\hat{p})}=\frac{1}{n\hat{p}}+\frac{1}{n\hat{p}(1-\hat{p})}=\frac{1}{n_0}+\frac{1}{n_1}$$

２×２分割表で、暴露のイベント数a、非イベント数b、非暴露のイベント数c、非暴露の非イベント数dのオッズ比のとき

$$V[\log OR]=V\left[\log\frac{a/c}{b/d}\right]=V\left[\log\frac{a}{b}\right]+\left[\log\frac{c}{d}\right]=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$$

近似的な標準誤差SE

$$SE=\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}$$

デルタ法

ここに数式を入力します。$Y=g(X)$という変数変換を行ったとする.
$g(X)$をXの平均のまわりでTaylor展開することにより, Yの平均や分散をXの平均や分散で近似的に表す方法である.

平均に関して、1次の項までTaylor展開し、

$$Y = g(X) \approx g(\mu) + (X-\mu)g'(\mu)$$

$$E(g(X)) \approx E[g(\mu) + (X-\mu)g'(\mu)]$$

$$= g(\mu) + \underbrace{(E(X)-\mu)}_{0}\, g'(\mu)$$

$$= g(\mu)$$

分散に関して、1次の項までTaylor展開し、$Y = g(X) \approx g(\mu) + (X-\mu)g'(\mu)$

分散の定義式より、

$$V[g(X)] = E[g(X)^2] - E[g(X)]^2$$

$$E[g(X)^2] = E\left[\left(g(\mu) + (X-\mu)g'(\mu)\right)^2\right]$$

$$= E[g(\mu)^2 + 2g(\mu)g'(\mu)(X-\mu) + \{(X-\mu)g'(\mu)\}^2]$$

$$= g(\mu)^2 + E[\{(X-\mu)g'(\mu)\}^2]$$

$$E[g(X)]^2 = g(\mu)^2$$

$$V[g(X)] = g(\mu)^2 + \underbrace{E[\{(X-\mu)}_{\sigma^2}g'(\mu)\}^2] - g(\mu)^2$$

$$= [g'(\mu)]^2\sigma^2$$