Xbar－R管理図を作成する

Xbar($\bar{X}$) 管理図

UCL(上方管理限界)= $\bar{\bar{X}}$ +A2 × $\bar{R}$　　UCL=19.18+0.577x0.08=19.226

LCL(下方管理限界)= $\bar{\bar{X}}$ −A2 × $\bar{R}$　　LCL =19.18−0.577x0.08=19.134

R管理図

UCL=D4 × $\bar{R}$　　UCL=2.115x0.08=0.169

LCL=D3 × $\bar{R}$　　LCL =0x0.08=0

k	データ(群)の大きさ(n=2～6が目安)					平均	範囲R
	X1	X2	X3	X4	X5		
1	19.19	19.18	19.18	19.12	19.19	19.17	0.07
2	19.22	19.17	19.22	19.2	19.13	19.19	0.09
3	19.19	19.14	19.21	19.18	19.16	19.18	0.07
4	19.14	19.12	19.17	19.22	19.22	19.17	0.10
5	19.21	19.17	19.19	19.19	19.18	19.19	0.04
6	19.2	19.19	19.23	19.16	19.15	19.19	0.08
7	19.19	19.16	19.17	19.23	19.19	19.19	0.07
8	19.15	19.24	19.19	19.2	19.17	19.19	0.09
9	19.14	19.26	19.18	19.18	19.2	19.19	0.12
10	19.29	19.2	19.16	19.16	19.16	19.19	0.13
11	19.18	19.17	19.14	19.12	19.17	19.16	0.06
12	19.18	19.22	19.21	19.17	19.19	19.19	0.05
13	19.12	19.2	19.18	19.22	19.19	19.18	0.10
14	19.19	19.13	19.16	19.22	19.18	19.18	0.09
15	19.2	19.19	19.15	19.14	19.29	19.19	0.15
16	19.19	19.16	19.24	19.26	19.2	19.21	0.10
17	19.23	19.17	19.19	19.18	19.16	19.19	0.07
18	19.16	19.23	19.2	19.18	19.16	19.19	0.07
19	19.15	19.19	19.17	19.2	19.16	19.17	0.05
20	19.19	19.14	19.21	19.18	19.16	19.18	0.07
↑データ(群)の数　K=20以上					合計	383.68	1.67
					平均	19.18	0.08

標準偏差 σ　0.0336

$\bar{\bar{X}}$　$\bar{R}$

X−R管理図用係数表			
n	A2	D4	D3
2	1.880	3.267	0.000
3	1.023	2.575	0.000
4	0.729	2.282	0.000
5	0.577	2.115	0.000
6	0.483	2.004	0.000
7	0.419	1.924	0.076
8	0.373	1.864	0.136
9	0.337	1.816	0.184
10	0.308	1.777	0.223

UCL及びLCLを以下のように定義することもある。
管理限界幅が甘くなる

UCL＝平均値＋３σ
　＝19.18＋3×0.0336＝19.281

LCL＝平均値－３σ
　＝19.18－3×0.0336＝19.079

標準誤差にすると係数表を用いた数値と同等になる

UCL＝平均値＋3 $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$$=19.18+3\times\frac{0.0336}{\sqrt{5}}=19.229$$

LCL＝平均値－ 3 $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$$=19.18-3\times\frac{0.0336}{\sqrt{5}}=19.139$$

UCL（上方管理限界）$=\bar{\bar{X}} + A2 \times \bar{R} = \bar{\bar{X}} + 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

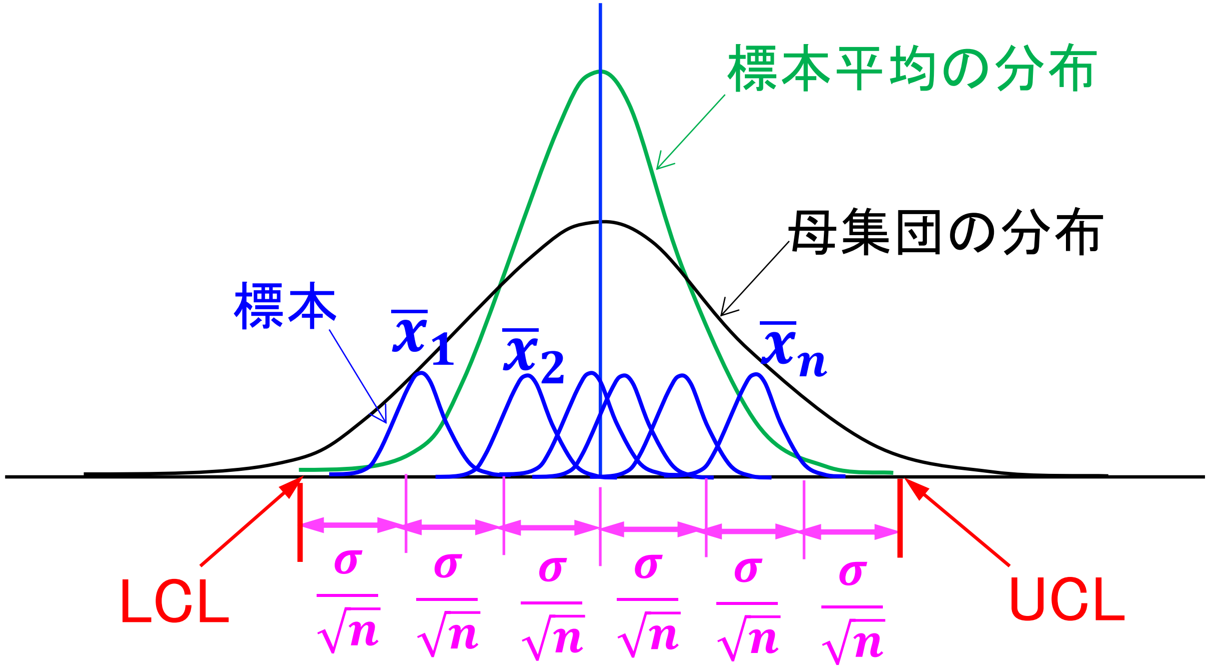
LCL（下方管理限界）$=\bar{\bar{X}} - A2 \times \bar{R} = \bar{\bar{X}} - 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

標準誤差

$$A2 = \frac{3}{d_2\sqrt{n}} = \frac{3\sigma}{\bar{R}\sqrt{n}}$$

$d_2 = \frac{\bar{R}}{\sigma}$ ←範囲の平均と標準偏差との比

標本平均の平均$\bar{\bar{X}}$



標本平均の平均（標本平均の期待値）

$$E(\bar{x}) = \bar{\bar{X}}$$

標本平均の標準偏差（標準誤差）

$$\mathrm{SE} = \sigma／\sqrt{n}$$

もしくは　$\mathrm{SE} = s／\sqrt{n-1} = u／\sqrt{n}$

確率変数xの範囲Rの期待値$\bar{R}$を算出

$$\bar{R}=\overline{x_L}-\overline{x_S}=\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot\left(F(x)^n\right)'dx+\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot\left(\left(1-F(x)\right)^n\right)'dx$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot\left(F(x)^n+\left(1-F(x)\right)^n\right)'dx$$
$$=\left[x\cdot F(x)^n+\left(1-F(x)\right)^n\right]_{-\infty}^{\infty}-\int_{-\infty}^{\infty}F(x)^n+\left(1-F(x)\right)^n dx$$
$$=[x]_{-\infty}^{\infty}-\int_{-\infty}^{\infty}\left(F(x)^n+\left(1-F(x)\right)^n\right)dx$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}dx-\int_{-\infty}^{\infty}\left(F(x)^n+\left(1-F(x)\right)^n\right)dx$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left(1-F(x)^n+\left(1-F(x)\right)^n\right)dx$$

確率変数xが元の変数Xの平均μと標準偏差σによって、$x=(X-\mu)/\sigma$と規格化された値のとき、Xの範囲の期待値$\bar{R}$と標準偏差σの関係は

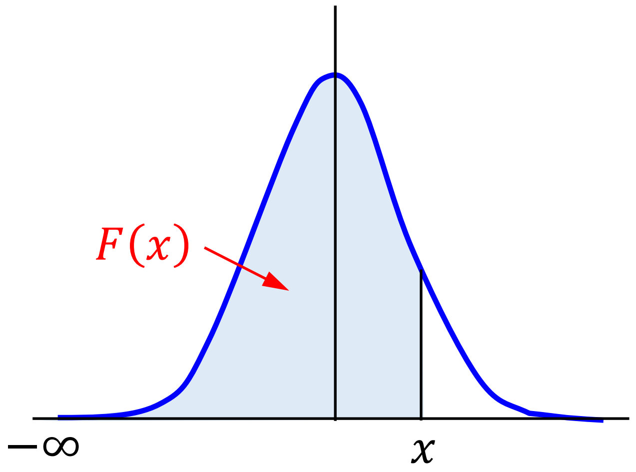
$$\bar{R}=\int_{-\infty}^{\infty}\left(1-F(X)^n+\left(1-F(X)\right)^n\right)dX$$
$$=\sigma\int_{-\infty}^{\infty}\left(1-F(x)^n+\left(1-F(x)\right)^n\right)dx$$

$\bar{R}=d_2\sigma$とすると

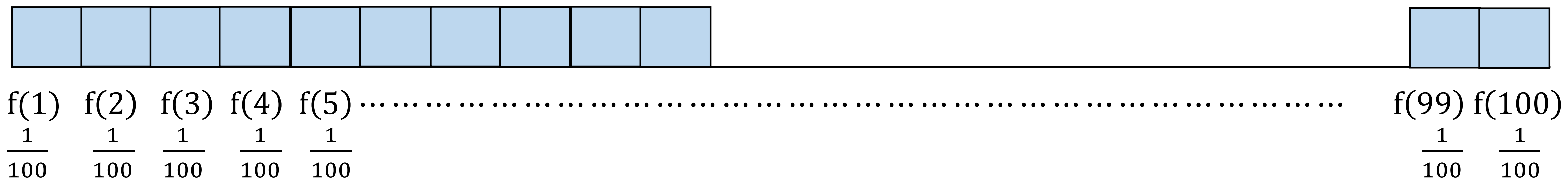
$$\Rightarrow\quad d_2=\frac{\bar{R}}{\sigma}=\int_{-\infty}^{\infty}\left(1-F(x)^n+\left(1-F(x)\right)^n\right)dx$$

累積分布関数$F(x)$が標準正規分布

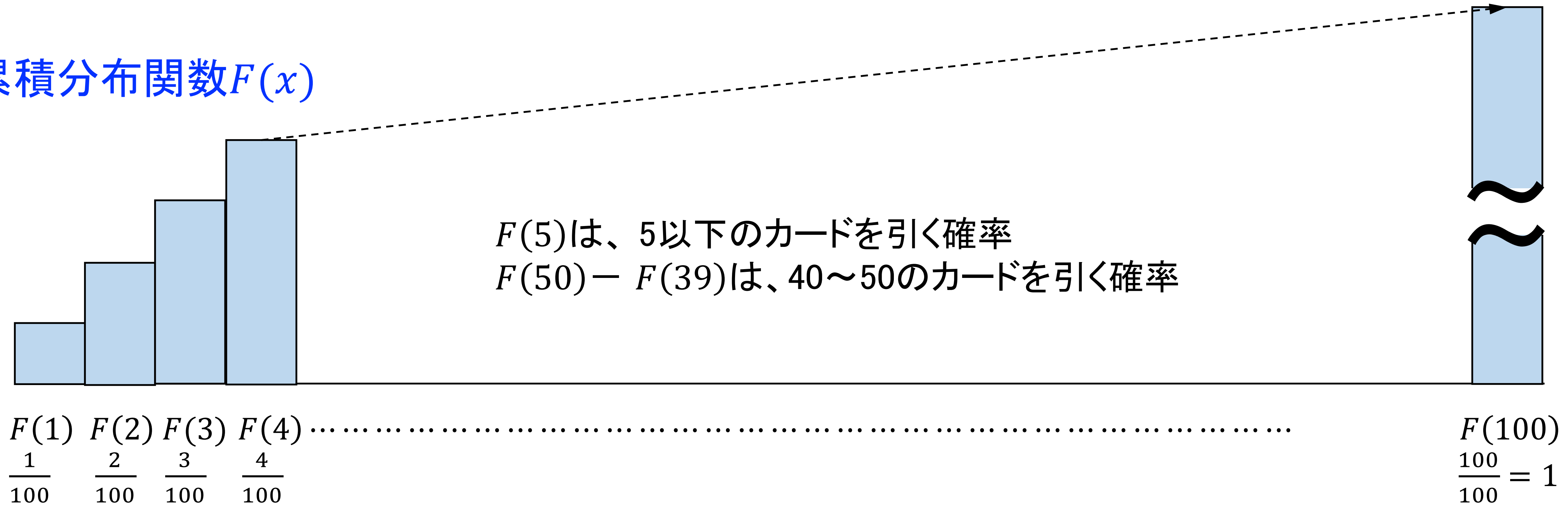
$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-x^2/2}\,dx$$



1～100枚のカードをランダムに1枚引いた時のカードの数字を確率変数Xとしたとき、
確率分布f(X)を考えることができます。この確率分布の累積分布関数を$F(x)$とします



累積分布関数$F(x)$



確率変数 $X_1,\cdots,X_n$が互いに独立に同一の分布（累積分布関数が F(x) ）に従うとする。
このとき，$X_1,\cdots,X_n$の最大値や最小値が従う分布

「最大値が x以下の確率」
＝「 $X_1,\cdots,X_n$が全て x以下になる確率」
＝$F(x)\times F(x)\times\cdots\times F(x)$
＝ $F(x)^n$

「最小値が x以上の確率」
＝「 $X_1,\cdots,X_n$の少なくとも1つがx以下になる確率」
＝$1-$[全部　x より大きい確率]
＝$1-\{1-F(x)\}^n$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \qquad F(-\infty) = 0、\quad F(\infty) = 1 \qquad f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = F'(x)$$

大きさnのサンプルx_iの最大値x_Lの期待値

あるx_iに対して、それ以外の$n-1$個のx_j（$i \neq j$）がx_i以下になる確率

$$\overline{x_L} = \sum_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} x_i\, \boldsymbol{f(x_i)F(x_i)^{n-1}} dx_i$$
$$= n\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\, F(x)^{n-1} dx$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot nF'(x)\, F(x)^{n-1} dx$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot (F(x)^n)' dx$$

期待値$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \times p_i$

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_{n-1}	x_n
$P(X)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_{n-1}	p_n

大きさnのサンプルx_iの最小値x_Sの期待値

あるx_iに対して、それ以外の$n-1$個のx_j（$i \neq j$）がx_i以上になる確率

$$\overline{x_S} = \sum_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} x_i\, f(x_i)\left(1 - F(x_i)\right)^{n-1} dx_i$$
$$= n\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\left(1 - F(x)\right)^{n-1} dx$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot nF'(x)\left(1 - F(x)\right)^{n-1} dx$$
$$= -\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \left(\left(1 - F(x)\right)^n\right)' dx$$

再掲

確率変数xの範囲Rの期待値$\bar{R}$を算出

$$\bar{R} = \overline{x_L} - \overline{x_S} = \int_{-\infty}^{\infty} x\cdot\left(F(x)^n\right)'dx + \int_{-\infty}^{\infty} x\cdot\left(\left(1-F(x)\right)^n\right)' dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x\cdot\left(F(x)^n + \left(1-F(x)\right)^n\right)' dx$$

$$= \left[x\cdot\left(F(x)^n + \left(1-F(x)\right)^n\right)\right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} 1\cdot\left(F(x)^n + \left(1-F(x)\right)^n\right)dx$$

$$= [x]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty}\left(F(x)^n + \left(1-F(x)\right)^n\right)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx - \int_{-\infty}^{\infty}\left(F(x)^n + \left(1-F(x)\right)^n\right)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left(1-F(x)^n + \left(1-F(x)\right)^n\right)dx$$

部分積分

$$\int fg = fG - \int f'G$$

f'はfの微分、Gはgの積分

確率変数xが元の変数Xの平均μと標準偏差σによって、$x=(X-\mu)/\sigma$と標準化された値のとき、Xの範囲の期待値$\bar{R}$と標準偏差σの関係は

$$\bar{R} = \int_{-\infty}^{\infty}\left(1-F(X)^n + \left(1-F(X)\right)^n\right)dX$$

$$= \sigma\int_{-\infty}^{\infty}\left(1-F(x)^n + \left(1-F(x)\right)^n\right)dx$$

$\bar{R} = d_2\sigma$とすると

$$d_2 = \frac{\bar{R}}{\sigma} = \int_{-\infty}^{\infty}\left(1-F(x)^n + \left(1-F(x)\right)^n\right)dx$$

累積分布関数$F(x)$が標準正規分布

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-x^2/2}\,dx$$