# 一様分布

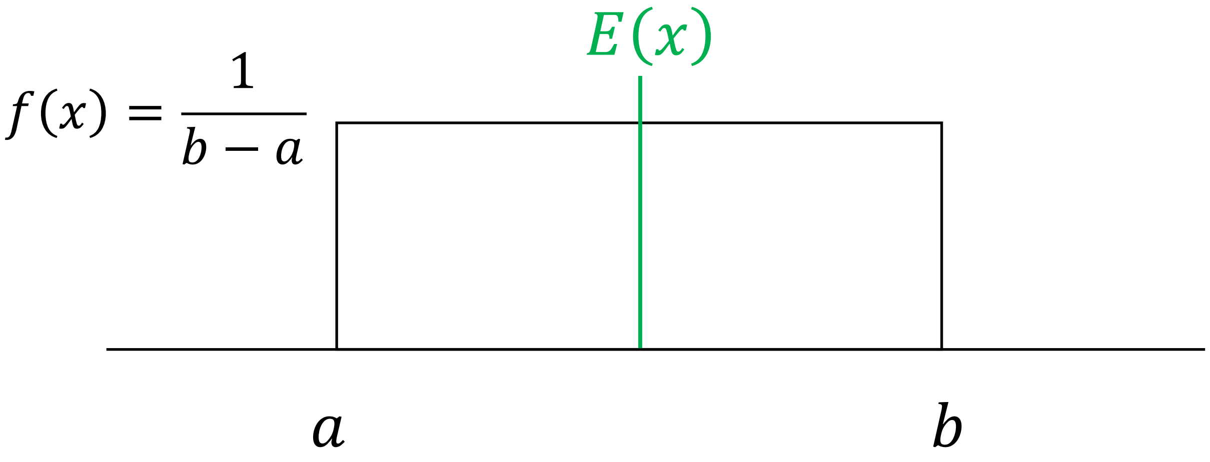
## 平均値の導出

$$f(x)\times(b-a)=1$$ ←累積確率密度

$$f(x)=\frac{1}{b-a}$$

## 期待値

$$E(x)=\int_a^b f(x)xdx=\int_a^b \frac{1}{b-a}xdx=\frac{1}{b-a}\int_a^b xdx=\frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b=\frac{1}{b-a}\frac{b^2-a^2}{2}=\frac{(b+a)(b-a)}{2(b-a)}=\frac{a+b}{2}$$



一般に分散は

$$V(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\{x - E(x)\}^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) x^2 dx - E(x)^2$$

一様分布の分散は

$$V(x) = \int_{a}^{b} f(x)\{x - E(x)\}^2 dx = \int_{a}^{b} f(x) x^2 dx - E(x)^2$$

$$= \int_a^b \frac{1}{b-a} x^2\, dx - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b - \frac{(a+b)^2}{4}$$

$$= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^3-a^3}{3} - \frac{a^2+2ab+b^2}{4}$$

$$= \frac{4b^3-4a^3-3(b-a)(a^2+2ab+b^2)}{12(b-a)}$$

$$= \frac{(b-a)^3}{12(b-a)}$$

$$= \frac{(b-a)^2}{12}$$

⇨ 標準偏差$D(x) = \sqrt{V(x)} = \dfrac{b-a}{2\sqrt{3}}$

# 分散の導出

$$V(x) = 2\int_a^{\frac{a+b}{2}} \frac{1}{b-a}(x - \frac{a+b}{2})^2 dx$$

$$= \frac{2}{b-a}\int_a^{\frac{a+b}{2}} (x - \frac{a+b}{2})^2 dx$$

$$= \frac{2}{b-a}\int_a^{\frac{a+b}{2}} \left\{x^2 - (a+b)x + \frac{(a+b)^2}{4}\right\} dx$$

$$= \frac{2}{b-a}\left\{\left[\frac{x^3}{3}\right]_a^{\frac{a+b}{2}} - (a+b)\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^{\frac{a+b}{2}} + \frac{(a+b)^2}{4}[x]_a^{\frac{a+b}{2}}\right\}$$

$$= \frac{2}{b-a}\left\{\frac{(a+b)^3}{24} + \frac{12(a+b)a^2 - 8a^3 - 6(a+b)^2 a}{24}\right\}$$

$$= \frac{2}{b-a} \cdot \frac{b^3 - a^3 - 3ab^2 + 3a^2 b}{24}$$

$$= \frac{2}{b-a} \cdot \frac{(b-a)^3}{24}$$

$$= \frac{(b-a)^2}{12}$$

⇨ 標準偏差$D(x) = \sqrt{V(x)} = \dfrac{b-a}{2\sqrt{3}}$