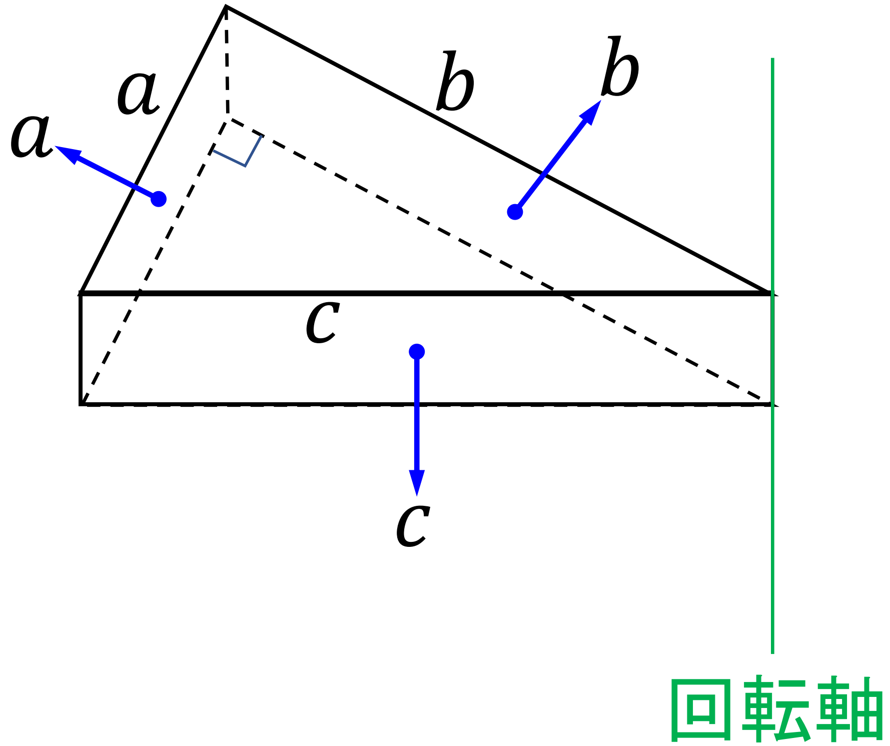
物理と数学の類似性



トルク＝力×腕の長さ

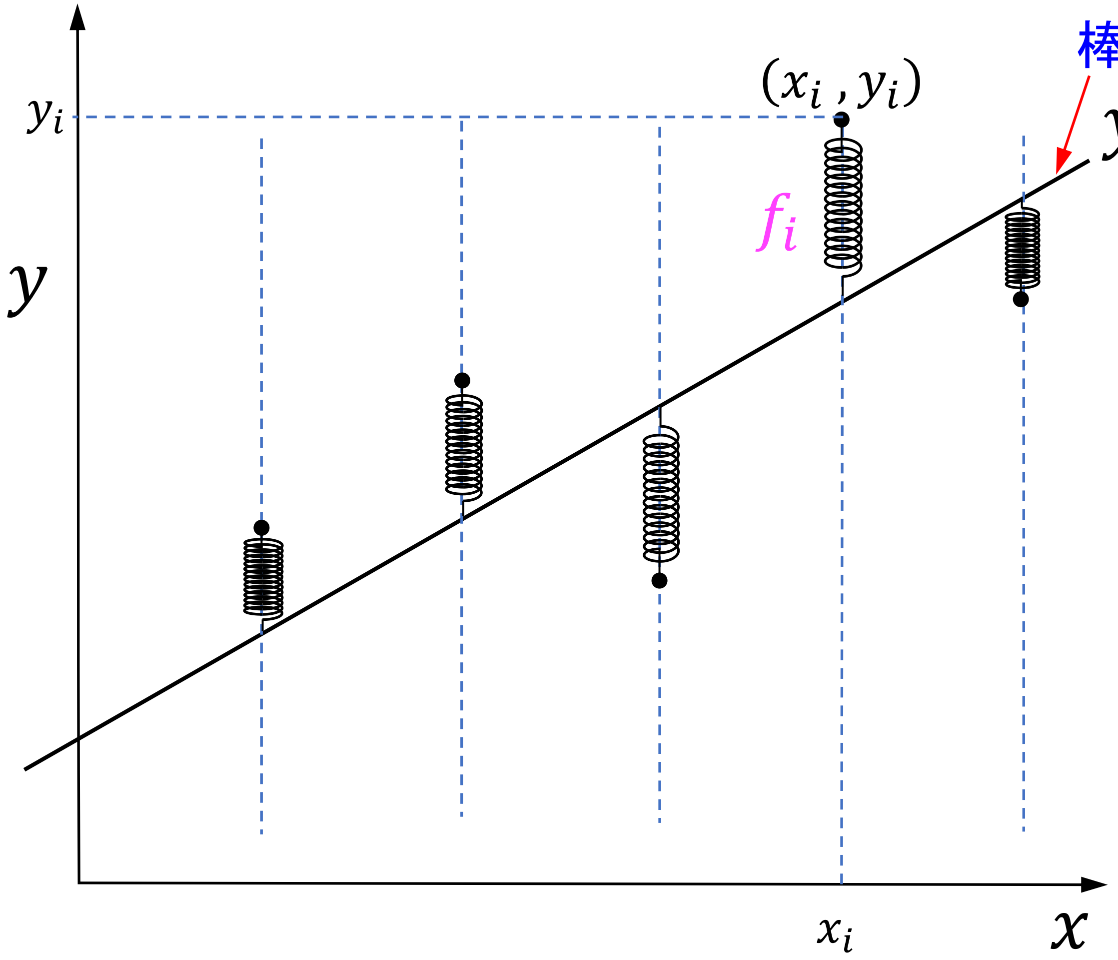
$$a \times \frac{a}{2} + b \times \frac{b}{2} = c \times \frac{c}{2}$$

⇩

$$a^2 + b^2 = c^2$$

ピタゴラスの定理

座標$(x_i\,,y_i)$と棒にバネがつながっている



棒の座標

$$y = mx + b$$

iの点でのフックの法則

$$f_i \propto y_i - (mx_i + b)$$

棒が静止するには合力F =0

$$F = \sum f_i = \sum y_i - (mx_i + b) = 0$$

棒が静止するモーメントM =0

$$M = \sum x_i f_i = \sum x_i\{y_i - (mx_i + b)\} = 0$$

$S = \sum\{y_i - (mx_i + b)\}^2$が最小になるのは

$$S = \sum_{i=1}^{n}\{y_i{}^2 - 2y_i(mx_i + b) + (mx_i + b)^2\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\{y_i{}^2 - 2mx_iy_i - 2by_i + m^2x_i{}^2 + 2mbx_i + b^2\}$$

$$S = m^2\sum_{i=1}^{n}x_i{}^2 + nb^2 + \sum_{i=1}^{n}y_i{}^2 - 2m\sum_{i=1}^{n}x_iy_i - 2b\sum_{I=1}^{n}y_i + 2mb\sum_{I=1}^{n}x_i$$

$$\frac{\partial S}{\partial m} = 2m\sum_{i=1}^{n}x_i{}^2 - 2\sum_{i=1}^{n}x_iy_i + 2b\sum_{I=1}^{n}x_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}x_iy_i - m\sum_{i=1}^{n}x_i{}^2 - b\sum_{I=1}^{n}x_i = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = 2nb - 2\sum_{I=1}^{n}y_i + 2m\sum_{I=1}^{n}x_i = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{I=1}^{n}y_i - nb - m\sum_{I=1}^{n}x_i = 0$$

$$b = \frac{1}{n}\sum_{I=1}^{n}y_i - \frac{m}{n}\sum_{I=1}^{n}x_i = \frac{n\bar{\boldsymbol{y}}}{n} - \frac{nm\bar{\boldsymbol{x}}}{n} = \boxed{\bar{\boldsymbol{y}} - m\bar{\boldsymbol{x}}}$$

bに代入して
mについて解く

$$\Downarrow$$

$$m = \frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n}}{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x{}^2}$$

最小二乗法の公式 $\quad y - \bar{y} = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x{}^2}\,(x - \bar{x})$

棒が静止するには合力F =0

$$\equiv \quad F = \sum f_i = \sum y_i - (mx_i + b) = 0$$

棒が静止するモーメントM =0

$$\equiv \quad M = \sum x_if_i = \sum x_i\{y_i - (mx_i + b)\} = 0$$

同じ式になっている