$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} \mathrm{dt}$$

ここで$t = u^2$　とする

$$= \int_0^{\infty} u^{-1} e^{-u^2} 2u\mathrm{du}$$

$$= 2\int_0^{\infty} e^{-u^2} \mathrm{du}$$

$$= \sqrt{\pi}$$

⇨

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} \mathrm{dt}$$

ここで$t = u^2$　とする

$$= \int_0^{\infty} u^{-1} e^{-u^2} 2u\mathrm{du}$$

$$= 2\int_0^{\infty} e^{-u^2} \mathrm{du}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} \mathrm{du}$$

$$= \sqrt{\pi}$$

⇩

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} \mathrm{du} = \sqrt{\pi}$$

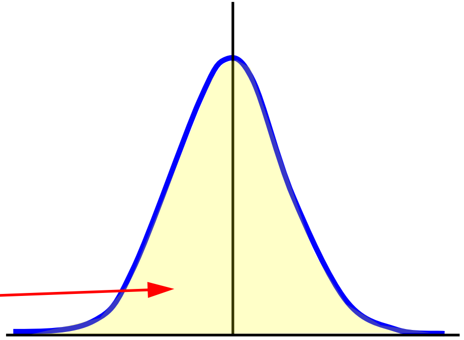
$\mathrm{u} = \frac{x}{\sqrt{2}}$　とおくと

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x = 1$$

標準正規分布

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$



面積は確率1

再掲

確率密度関数

t分布

$$f(t) = \frac{\boxed{\Gamma((\nu+1)/2)}}{\sqrt{\nu\pi}\,\boxed{\Gamma(\nu/2)}}(1+t^2/\nu)^{-(\nu+1)/2}$$

$$U_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2 \qquad T = \frac{\overline{X}_n - \mu}{U_n/\sqrt{n}}$$

U_n : 分散　μ : 母集団の平均値

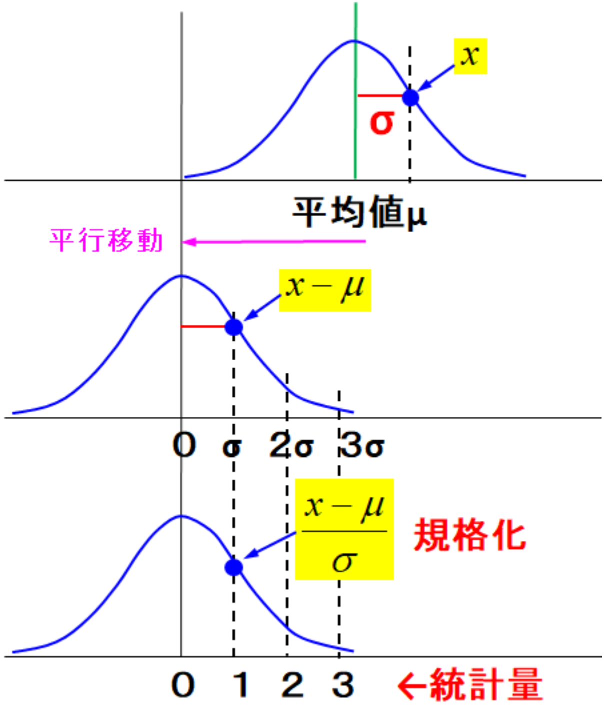
$\bar{X}_n$: 標本の平均値

ν : 自由度

ガンマ(Γ)関数とは何？

正規分布

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$



平均値$\mu = 0$とすると

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

標準偏差$\sigma = 1$とすると

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

ガンマ（Γ）関数とは何？

［定義］ 実部が正であるような複素数 z に対して $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} \mathrm{dt}$

任意の正の整数 nに対して， $\Gamma(n+1) = n!$

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\,\mathrm{dt} = [-e^{-t}]_0^\infty = 1$$

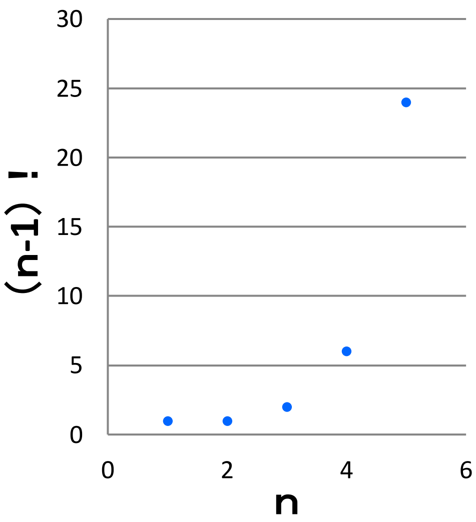
$$\begin{aligned}
\Gamma(n) &= \int_0^\infty t^{n-1} e^{-t} \mathrm{dt} \\
&= [-t^{-n-1}e^{-t}]_0^\infty - \int_0^\infty \{-(n-1)t^{n-2}e^{-t}\}\mathrm{dt} \\
&= 0 + (n-1) \int_0^\infty t^{n-2}e^{-t}\mathrm{dt} \\
&= (n-1)\,\Gamma(n-1)
\end{aligned}$$

以上より $\Gamma(n+1) = n!\,\Gamma(1) = n!$

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

$$\Gamma(1) = 0! = 1$$
$$\Gamma(2) = 1! = 1$$
$$\Gamma(3) = 2! = 2 \cdot 1 = 2$$
$$\Gamma(4) = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

n	(n−1)!
1	1
2	1
3	2
4	6
5	24

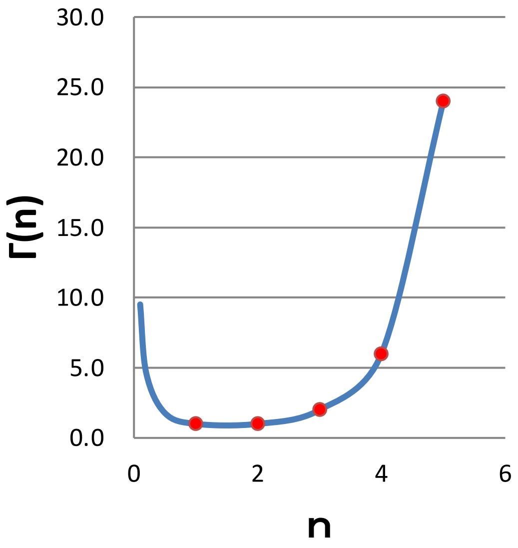


=FACT(n)

=GAMMA(n)
または
=EXP(GAMMALN(n))

n	(n−1)!	Γ(n)
0.1	#NUM!	9.5
0.2	#NUM!	4.6
0.5	#NUM!	1.8
1	1	1
2	1	1
3	2	2
4	6	6
5	24	24

n整数のため
計算不能



$$\Gamma(n) = (n-1)! = (n-1)\Gamma(n-1)$$

$\Gamma(3.5) = 2.5! = 2.5\times \Gamma(2.5)$

$= 2.5 \times 1.5! = 2.5\times 1.5\times \Gamma(1.5)$

$= 2.5 \times 1.5 \times 0.5! = 2.5\times 1.5\times 0.5 \times \Gamma(0.5)$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} e^{-t}\mathrm{dt}$$

ここで$t = u^2$　とする

$$= \int_0^\infty u^{-1} e^{-u^2} 2u\mathrm{du}$$

$$= 2\int_0^\infty e^{-u^2}\,\mathrm{du}$$

$$= \sqrt{\pi}$$

$\Gamma(3.5) = 2.5 \times 1.5 \times 0.5! = 2.5\times 1.5\times 0.5 \times \Gamma(0.5)$

$= 2.5\times 1.5\times 0.5 \times \sqrt{\pi}$

$\fallingdotseq 3.323$