ドゥブロイの関係式

$E = \hbar\omega$

$p = \hbar k$

$\uparrow \quad \uparrow$

粒子　波動

ω : 単位時間に振動する回数

k : 単位距離にある波の数

$\psi = Ae^{i(kx-\omega t)}$ とおく

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\psi = Ai\hbar\frac{\partial}{\partial x}e^{i(kx-\omega t)} \qquad \leftarrow \frac{\partial}{\partial x}e^{at} = ae^{at}$$

$$= Ai\hbar(-i\omega)\,e^{i(kx-\omega t)}$$

$$= \hbar\omega\psi$$

$$= E\psi$$

量子化では、xとpという物理量が交換しなくなる

$$px - xp = -i\hbar$$

ニュートン力学ではゼロ

↓

$[p, x]$とかく

運動量を量子力学では演算子で表記

$$p = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$$

交換則が成り立たない例

$$f(x) = 3x\ ,\ g(x) = \sqrt{x}$$

$$f\big(g(x)\big) = f(\sqrt{x}) = 3\sqrt{x}$$

$$g\big(f(x)\big) = g(3x) = \sqrt{3x}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}19 & 22\\ 43 & 50\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}23 & 34\\ 31 & 46\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}[p, x]\psi(x) &= px\psi(x) - xp\psi(x)\\ &= -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}x\psi(x) - x\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x)\\ &= -i\hbar\psi(x) - i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\psi(x) + i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\psi(x)\\ &= -i\hbar\psi(x)\end{aligned}$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgh$$

$$E = \frac{p^2}{2m} + V(x)$$

$V(x)$: ポテンシャルエネルギー

運動量を量子力学では演算子で表記

$$p = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$$

$$H = \frac{1}{2m}\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + V(x)$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = H\psi$$

$$= \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right)\psi$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right)\psi$$

時間に依存する部分　空間に依存する部分

$$\leftarrow \psi(x,t) = e^{-i\frac{E}{\hbar}t}\psi(x)$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}e^{-i\frac{E}{\hbar}t}\psi(x)$$

$$= i\hbar\left(-i\frac{E}{\hbar}\right)e^{-i\frac{E}{\hbar}t}\psi(x)$$

$$\leftarrow \frac{\partial}{\partial x}e^{at} = ae^{at}$$

$$= E\,e^{-i\frac{E}{\hbar}t}\psi(x)$$

$$E\,e^{-i\frac{E}{\hbar}t}\psi(x) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right)\psi(x)$$

$$\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V)\psi(x) = 0$$

← 定常状態のシュレディンガー方程式

$$\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2}+\frac{2m}{\hbar^2}(E-V)\psi(x)=0$$

$V(x)=0$のとき

$$\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2}+\frac{2m}{\hbar^2}E\psi(x)=0$$

解を$\psi=C\sin\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}x+D\cos\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}x$　とおく

$x=0$で$\psi=0$の境界条件より$D=0$

$$\psi=C\sin\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}x$$

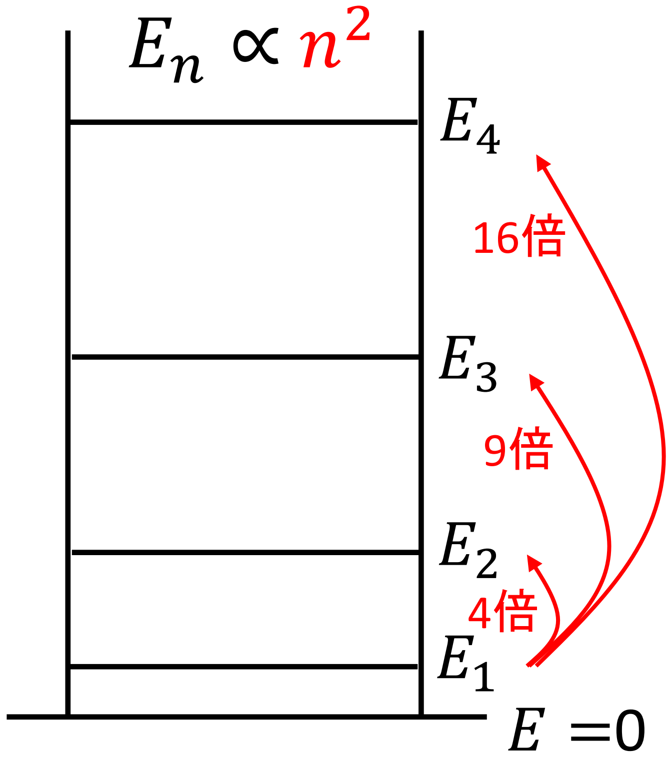
$x=L$で$\psi=0$なので

$$0=C\sin\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}L$$

$\sin$がゼロになるのは、$\sin(n\pi)$のときなので

$$\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}=n\pi$$

$$E_n=\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$$



エネルギーがとびとび　⇐量子化

$$\psi = C \sin \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} x$$

固有値

$$\leftarrow E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$$

$$= C \sin \frac{\sqrt{2m\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2}}}{\hbar} x$$

$$= C \sin \frac{\sqrt{\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{L^2}}}{\hbar} x$$

$$= C \sin \frac{n\pi x}{L}$$

$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_n|^2 \, dx = 1$より

$$\psi_n = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L}$$

固有関数

$$\mathrm{H}\psi_n = E_n \, \psi_n$$