ベクトル

$\boldsymbol{x} = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$ $\quad$ $\boldsymbol{y} = b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n$

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "A"] \arrow[d, shift right, "P^{-1}"'] & y \arrow[d, shift right, "P^{-1}"'] \\
x' \arrow[r, "P^{-1}A\,P"'] \arrow[u, shift right, "P"'] & y' \arrow[u, shift right, "P"']
\end{tikzcd}$$

$$x' = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \qquad y' = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_1 \\ \lambda_2 a_2 \\ \vdots \\ \lambda_n a_n \end{pmatrix}$$

Pは基底$e_1e_2\cdots e_n$を基底$x_1x_2\cdots x_n$に取り換える行列

$$P = (e_1e_2\cdots e_n)^{-1}(x_1x_2\cdots x_n) = (x_1x_2\cdots x_n)$$

固有ベクトル

$$x = P\,x' \qquad y = P\,y'$$

$$y = Ax \quad \rightarrow \quad P\,y' = A\,P\,x' \quad \rightarrow \quad P^{-1}\,P\,y' = P^{-1}A\,P\,x' \quad \rightarrow \quad y' = P^{-1}A\,P\,x'$$

$$P^{-1}A\,P = P^{-1}A\,(x_1x_2\cdots x_n) = P^{-1}\,(Ax_1Ax_2\cdots Ax_n)$$

ここで、$Ax_1 = \lambda_1\,x_1 \quad Ax_2 = \lambda_2\,x_2 \quad \cdots\cdots \quad Ax_n = \lambda_n\,x_n$

λ:固有値

$$= P^{-1}\,(\lambda_1\,x_1\lambda_2\,x_2\cdots\lambda_n\,x_n)$$

$$= P^{-1}\,(x_1x_2\cdots x_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = P^{-1}\,P\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
(P^{-1}A\,P)^k &= (P^{-1}A\,P)\,(P^{-1}A\,P)\cdots(P^{-1}A\,P)\,(P^{-1}A\,P) \\
&= P^{-1}A\,(PP^{-1})\,A\,(PP^{-1})\,A\cdots(PP^{-1})\,A\,P \\
&= P^{-1}A^k\,P
\end{aligned}
$$

$$
\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} {\lambda_1}^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & {\lambda_2}^k & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & {\lambda_n}^k \end{pmatrix}
$$

正方行列の累乗

$$
PP^{-1}A^k\,PP^{-1} = P \begin{pmatrix} {\lambda_1}^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & {\lambda_2}^k & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & {\lambda_n}^k \end{pmatrix} P^{-1} \Rightarrow A^k = \begin{pmatrix} {\lambda_1}^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & {\lambda_2}^k & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & {\lambda_n}^k \end{pmatrix}
$$

$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ を対角化する行列Pを求め。行列Aを対角化する

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda)(2-\lambda) = -(\lambda-1)(\lambda+2)(\lambda-2) = 0$$

固有値λ_1＝1、λ_2＝−1、λ_3＝２

λ_1＝1

$$\begin{pmatrix} 1-1 & -4 & 0 \\ 0 & -1-1 & 0 \\ 1 & 2 & 2-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$-4y = 0$

$-2y = 0$

$x + y + z = 0$

$y = 0$

$x + z = 0$

$x = s_1$とおくと、$y = 0$、$z = -x = -s_1$

$$x_1 = \begin{pmatrix} s_1 \\ 0 \\ -s_1 \end{pmatrix} = s_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = -1$

$$\begin{pmatrix} 1+1 & -4 & 0 \\ 0 & -1+1 & 0 \\ 1 & 2 & 2+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$2x - 4y = 0$

$x + 2y + 3z = 0$

$x - 2y = 0$

$x + 2y + 3z = 0$

$x - 2y = 0$

$2x + 3z = 0$

$x = 6s_2$とおくと、$y = 3s_2$、$z = -4s_2$

$$x_2 = \begin{pmatrix} 6s_2 \\ 3s_2 \\ -4s_2 \end{pmatrix} = s_2\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

λ_3＝2

$$\begin{pmatrix} 1-2 & -4 & 0 \\ 0 & -1-2 & 0 \\ 1 & 2 & 2-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$-x - 4y = 0$

$-3y = 0$

$x + 2y = 0$

$x + 4y = 0$

$y = 0$

$x + 2y = 0$

$x = 0$、、$y = 0$、$z = s_3$

$$x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ s_3 \end{pmatrix} = s_3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P = (x_1 x_2 x_3) = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}A\,P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$A=\begin{pmatrix}5 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$の対角化は？

$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}5-\lambda & -2\\ 2 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(5-\lambda)(1-\lambda)+4=\lambda^2-6\lambda+9=(\lambda-3)^2=0$

固有値$\lambda=3$（重解）　固有ベクトルは、$\begin{pmatrix}5-3 & -2\\ 2 & 1-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$　　$\begin{matrix}2x-2y=0\\ 2x-2y=0\end{matrix}$　　$x-y=0$

$x=s$　　$x=s\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$　←固有ベクトルが1つ（重解）しかないので、対角化はできない

ジョルダン標準形

$$\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}$$

固有値λが対角に並び上の成分に1がある正方行列が繋がっている

を用いて、対角化する

行列Aが固有値λ（重解）を持ち固有ベクトルをxとする ⇨

$(A-\lambda E)\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}$　→　$A\boldsymbol{y}-\lambda\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}$　→　$A\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}+\lambda\boldsymbol{y}$

$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{x}\ \boldsymbol{y})$とする

$A\,\boldsymbol{P}=A\,(\boldsymbol{x}\ \boldsymbol{y})=(A\boldsymbol{x}\ A\boldsymbol{y})=(\lambda\boldsymbol{x}\ \ \boldsymbol{x}+\lambda\boldsymbol{y})$

$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix},\ \boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}$とおく

$A\,\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\lambda x & x+\lambda u\\ \lambda y & y+\lambda v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & u\\ y & v\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$

$\boldsymbol{P}^{-1}A\,\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$　←ジョルダン標準型

対角化できなかった $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ をジョルダン標準形を用いて対角化する

$y = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$とおく　　$\leftarrow x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$でも良いが計算を容易にするため$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$とする

$(A - \lambda E)y = x$は、

$$\begin{pmatrix} 5-3 & -2 \\ 2 & 1-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

これより $2u - 2v = 2$　$2u - 2v = 2$　←同じ式が2つ

$u = s_2$ とおけば、 $v = s_2 - 1$

$$y = \begin{pmatrix} s_2 \\ s_2 - 1 \end{pmatrix} = s_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

s_2 =0とすれば、

$$y = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$P = (x\ \ y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{2 \cdot (-1) - 0 \cdot 2}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}A\,P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$ ←ジョルダン標準型

固有値$\lambda = 3$（重解）