

ニュートン・ラフソン法

$f(x) = 0$ を x_0 で
テイラー展開 →

$$f(x_0) + \frac{1}{1!}f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots = 0$$

2次以降無視して

$$f'(x_0)(x - x_0) = -f(x_0)$$

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$f(x) = x^2 - k = 0$ の解を求める

$k=3$ のとき

$$f'(x) = 2x$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(1)}{f'(1)} = 1 - \frac{-2}{2} = 2$$

$$\text{error} = \left| \frac{x_0 - \sqrt{3}}{\sqrt{3}} \right| = \left| \frac{1 - \sqrt{3}}{\sqrt{3}} \right| = 0.42265$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(2)}{f'(2)} = 2 - \frac{1}{4} = 1.75$$

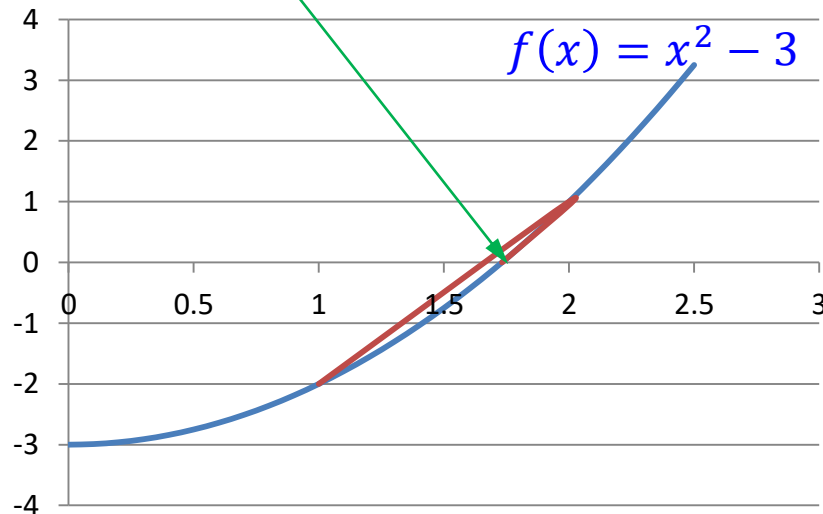
$$\text{error} = \left| \frac{x_1 - \sqrt{3}}{\sqrt{3}} \right| = \left| \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{3}} \right| = 0.154701$$

⋮

errorが0になるまで続ける

k	3	x	f(x)	f'(x)	error
x0		1	-2	2	0.42265
x1		2	1	4	0.154701
x2		1.75	0.0625	3.5	0.010363
x3		1.732143	0.000319	3.464286	5.31E-05
x4		1.732051	8.47E-09	3.464102	1.41E-09
x5		1.732051	0	3.464102	0

解



二分法

$f(x) = 0$ の x を求める方法

$$c = \frac{a + b}{2}$$

$f(a)$ 、 $f(b)$ 及び $f(c)$ を算出

$$f(a) \times f(b) < 0$$

$$c \rightarrow a, a \rightarrow b$$

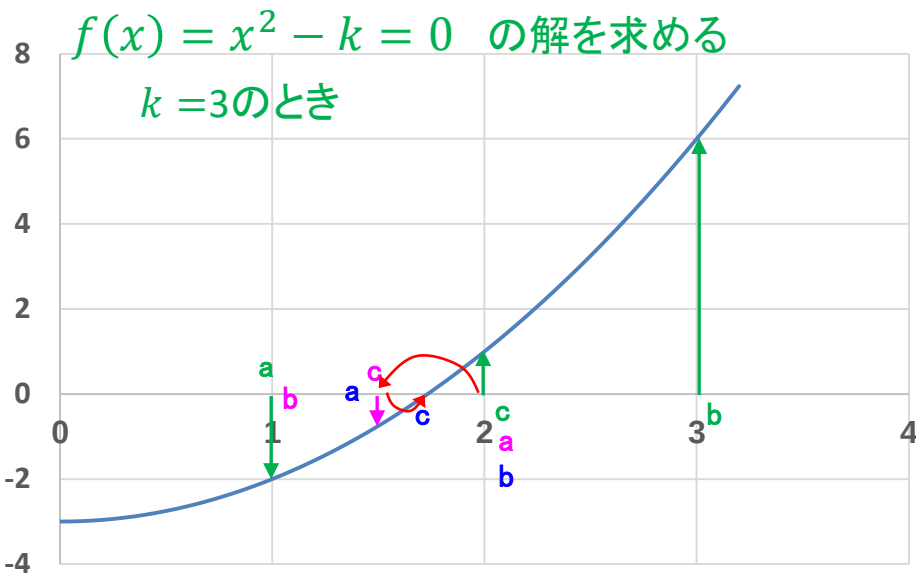
$$c = \frac{a + b}{2}$$

$f(a)$ 、 $f(b)$ 及び $f(c)$ を算出

$$f(a) \times f(b) < 0$$

$$c \rightarrow a, a \rightarrow b$$

errorが0になるまで続ける



	a	f(a)	b	f(b)	c	f(c)	f(a)*f(c)	error
x0	1	-2	3	6	2	1	-2	0.154701
x1	2	1	1	-2	1.5	-0.75	-0.75	0.133975
x2	1.5	-0.75	2	1	1.75	0.0625	-0.04688	0.010363
x3	1.75	0.0625	1.5	-0.75	1.625	-0.35938	-0.02246	0.061806
x4	1.625	-0.35938	1.75	0.0625	1.6875	-0.15234	0.054749	0.025721
x5	1.6875	-0.15234	1.75	0.0625	1.71875	-0.0459	0.006992	0.007679
x6	1.71875	-0.0459	1.75	0.0625	1.734375	0.008057	-0.00037	0.001342
x7	1.734375	0.008057	1.71875	-0.0459	1.726563	-0.01898	-0.00015	0.003169
x8	1.726563	-0.01898	1.734375	0.008057	1.730469	-0.00548	0.000104	0.000913
x9	1.730469	-0.00548	1.734375	0.008057	1.732422	0.001286	-7E-06	0.000214
x10	1.732422	0.001286	1.730469	-0.00548	1.731445	-0.0021	-2.7E-06	0.00035
x11	1.731445	-0.0021	1.732422	0.001286	1.731934	-0.00041	8.51E-07	6.77E-05
x12	1.731934	-0.00041	1.732422	0.001286	1.732178	0.00044	-1.8E-07	7.33E-05
x13	1.732178	0.00044	1.731934	-0.0004	1.732056	1.68E-05	7.4E-09	2.8E-06

解

はさみうち法

2つの三角形が相似なので

$$c = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$$

$$f(x) = x^2 - 3 = 0$$

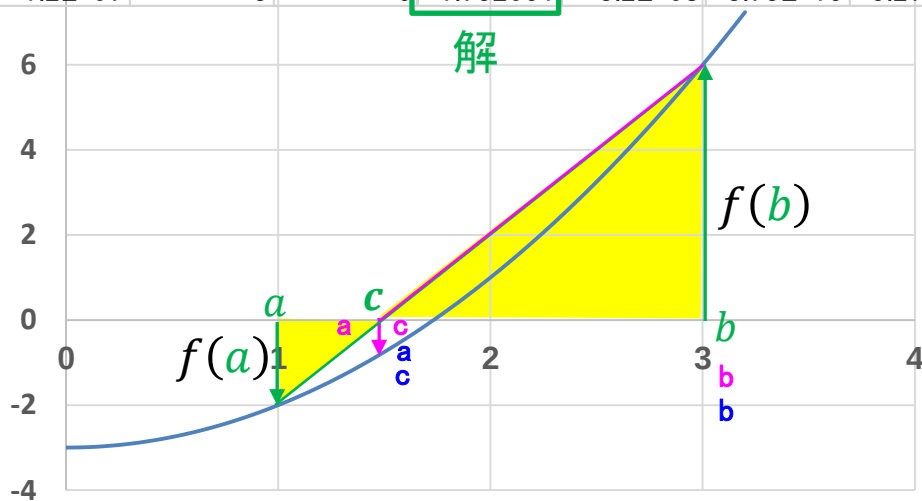
$a=1$ 、 $b=3$ から始める

$$\begin{aligned} c &= \frac{f(3) - 3f(1)}{f(3) - f(1)} \\ &= \frac{6+6}{6+2} = 1.5 \rightarrow a \end{aligned}$$



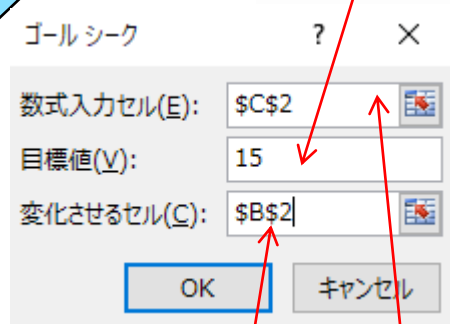
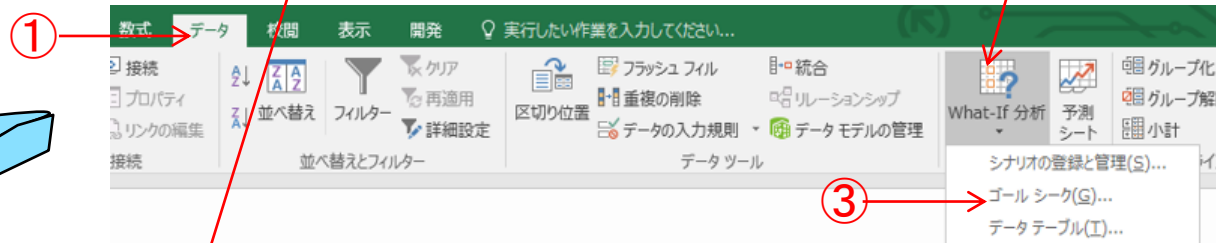
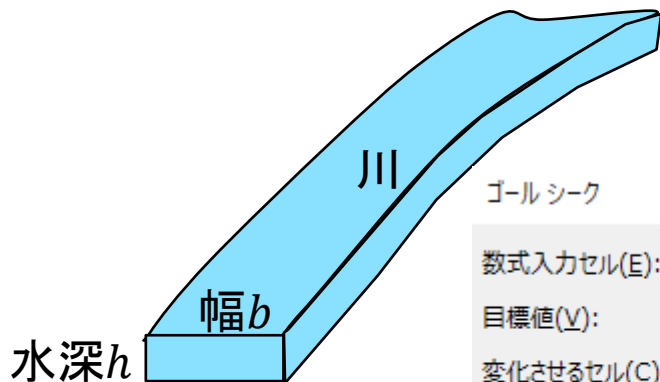
errorが0になるまで続ける

	3	a	f(a)	b	f(b)	c	f(c)	f(a)*f(c)	error
x0		1	-2	3	6	1.5	-0.75	1.5	0.133975
x1		1.5	-0.75	3	6	1.66667	-0.22222	0.166667	0.03775
x2		1.66667	-0.22222	3	6	1.71429	-0.06122	0.013605	0.010257
x3		1.714286	-0.06122	3	6	1.727273	-0.01653	0.001012	0.002759
x4		1.727273	-0.01653	3	6	1.730769	-0.00444	7.34E-05	0.00074
x5		1.730769	-0.00444	3	6	1.731707	-0.00119	5.28E-06	0.000198
x6		1.731707	-0.00119	3	6	1.731959	-0.00032	3.79E-07	5.31E-05
x7		1.731959	-0.00032	3	6	1.732026	-8.5E-05	2.72E-08	1.42E-05
x8		1.732026	-8.5E-05	3	6	1.732044	-2.3E-05	1.96E-09	3.82E-06
x9		1.732044	-2.3E-05	3	6	1.732049	-6.1E-06	1.4E-10	1.02E-06
x10		1.732049	-6.1E-06	3	6	1.73205	-1.6E-06	1.01E-11	2.74E-07
x11		1.73205	-1.6E-06	3	6	1.732051	-4.4E-07	7.24E-13	7.34E-08
x12		1.732051	-4.4E-07	3	6	1.732051	-1.2E-07	5.2E-14	1.97E-08
x13		1.732051	-1.2E-07	3	6	1.732051	-3.2E-08	3.73E-15	5.27E-09

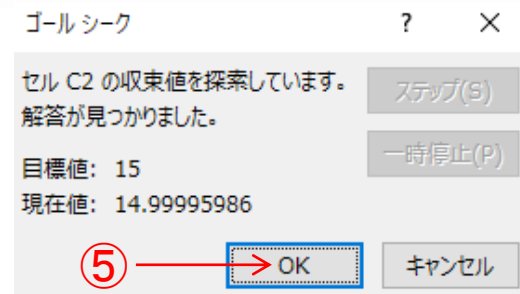


流量 $Q = abh\{bh/(b + 2h)\}^{2/3}$ で表される。

定数 $a = \frac{1m^{1/3}}{s、幅b} = 5m$ $Q = 15m^3/s$ の時の水深 h を求めよ



b	h	Q
5	1	3.995318



b	h	Q
5	2.563819	14.99996

解

ほぼ15