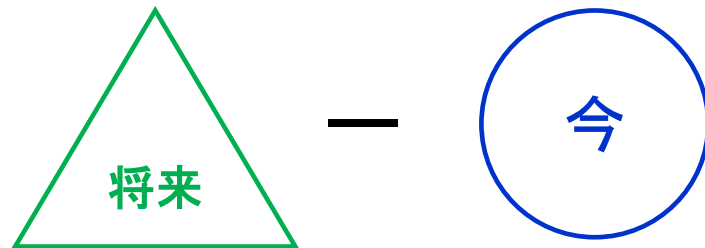
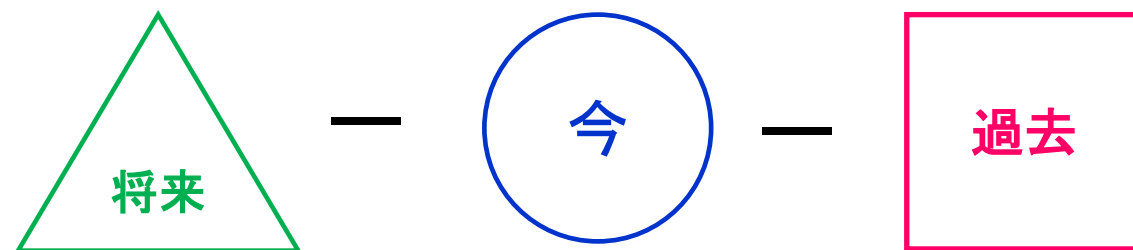


1階微分 $\frac{dx}{dt}$



2階微分 $\frac{d^2x}{dt^2}$



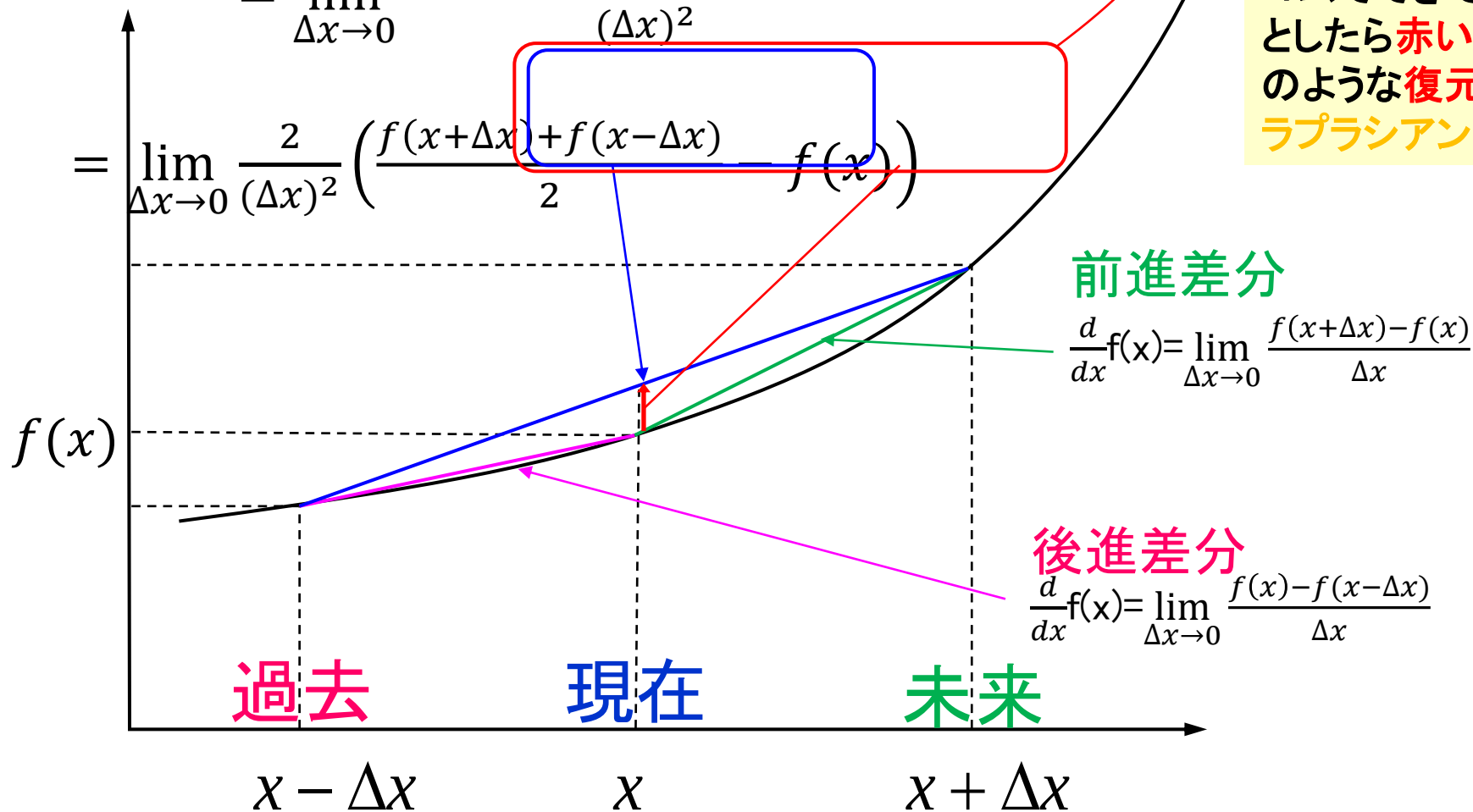
ラプラシアン

物理現象では「私は周囲の平均でいたい！」という方向に力が働く

→熱伝導方程式では、「周囲温度の平均が私の温度」

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} - \frac{f(x) - f(x-\Delta x)}{\Delta x}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - 2f(x) + f(x-\Delta x)}{(\Delta x)^2}$$



式の導出

f(x)のテイラー展開

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta x \cdot \frac{d}{dx} f(x) + \frac{\Delta x^2}{2} \cdot \frac{d^2}{dx^2} f(x) + \frac{\Delta x^3}{6} \cdot \frac{d^3}{dx^3} f(x) + \cdots$$

$$f(x - \Delta x) = f(x) - \Delta x \cdot \frac{d}{dx} f(x) + \frac{\Delta x^2}{2} \cdot \frac{d^2}{dx^2} f(x) - \frac{\Delta x^3}{6} \cdot \frac{d^3}{dx^3} f(x) + \cdots$$

両辺加えて

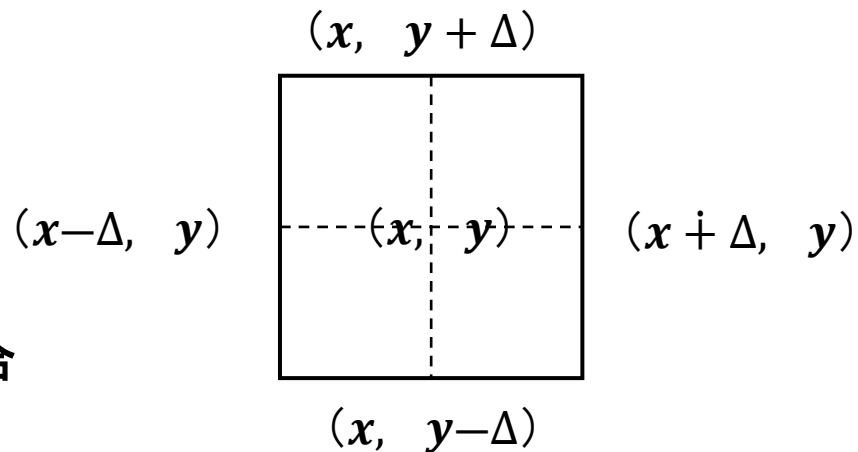
$$f(x + \Delta x) + f(x - \Delta x) = 2f(x) + \Delta x^2 \cdot \frac{d^2}{dx^2} f(x) + O(\Delta x^4)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} f(x) = \frac{f(x + \Delta x) - 2f(x) + f(x - \Delta x)}{\Delta x^2}$$

引いて

$$f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x) = 2\Delta x \cdot \frac{d}{dx} f(x) + O(\Delta x^3)$$

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x}$$



2次元の場合

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} \right) f(x, y) \\
 &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} (f(x + \Delta, y) + f(x - \Delta, y) + f(x, y + \Delta) + f(x, y - \Delta) - 4f(x, y)) \\
 &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{4}{(\Delta)^2} \left(\frac{f(x+\Delta, y) + f(x-\Delta, y) + f(x, y+\Delta) + f(x, y-\Delta)}{4} - f(x, y) \right)
 \end{aligned}$$

自分 $f(x, y)$ の周りの4か所の平均値との差

3次元の場合

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2} \right) f(x, y, z) \\
 &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} (f(x + \Delta, y, z) + f(x - \Delta, y, z) + f(x, y + \Delta, z) + f(x, y - \Delta, z) + f(x, y, z + \Delta) \\
 &\quad + f(x, y, z - \Delta) - 6f(x, y, z)) \\
 &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{6}{(\Delta)^2} \left(\frac{f(x+\Delta, y, z) + f(x-\Delta, y, z) + f(x, y+\Delta, z) + f(x, y-\Delta, z) + f(x, y, z+\Delta) + f(x, y, z-\Delta)}{6} - f(x, y, z) \right)
 \end{aligned}$$

自分 $f(x, y, z)$ の周りの6か所の平均値との差

ラプラシアンとは？

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

物理の式によく出てくる、この2階微分の意味は？

ラプラシアンをかけるとは

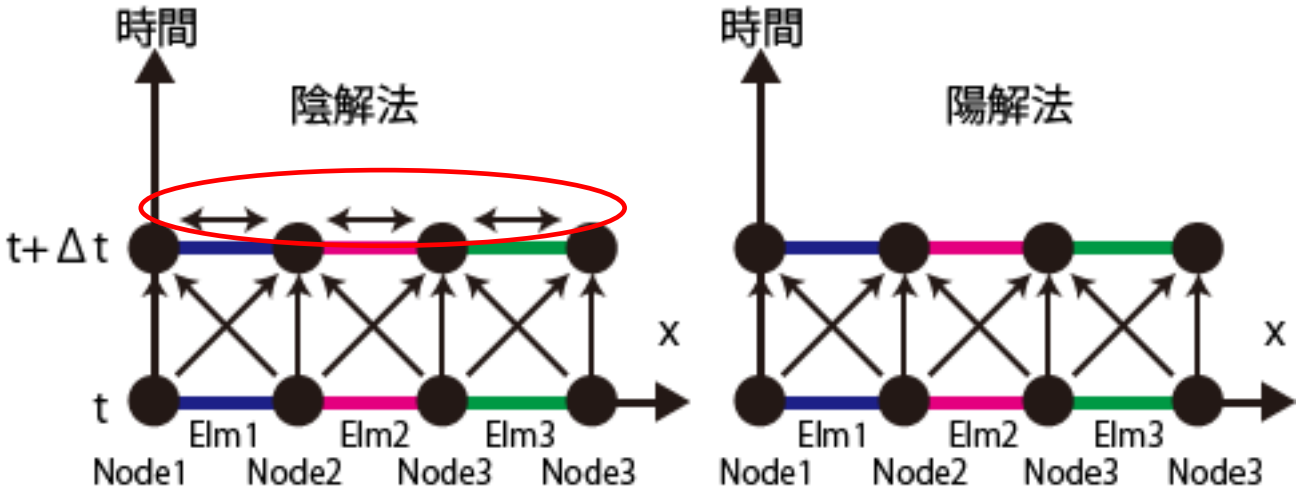
3次元の場合：

「上下左右前後の平均」と「自分自身」の差を計算すること

ラプラシアンをかけると0(ゼロ)になる式は、**自分の周りの平均と自分の値が同じにする意味**

陽解法と陰解法

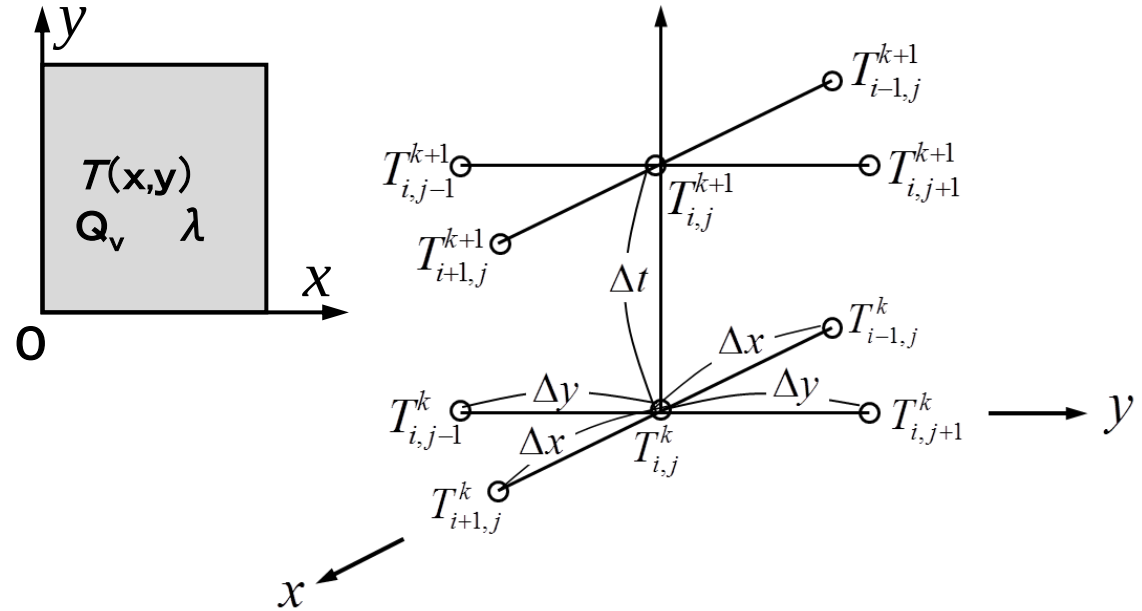
	陰解法	陽解法
適用	静的、準静的な問題、動的な問題でも比較的長い周期で振動するような問題の解析に適	衝突、落下問題などの非線形性が強く、非常に短い時間で起こる現象の解析に適
時間	時間増分を大きくしても安定して解を得る	発散し易い クーラン条件を満足するような時間増分に設定する必要
計算量	連立方程式を解く必要があるため、1時間増分当たりの計算量が多い	連立方程式を解かないため、1時間増分当たりの計算量が少ない
メモリー	陽解法に比べて大きなメモリー容量が必要	陰解法に比べて小さなメモリー容量で済む



非定常二次元

基礎方程式

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left(\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{d^2 T}{dy^2} \right) + \frac{Q_v}{\rho c} \quad a = \frac{\lambda}{\rho c}$$



陽解法

$$T_{i,j}^{k+1} = c_x (T_{i+1,j}^k + T_{i-1,j}^k) + c_y (T_{i,j+1}^k + T_{i,j-1}^k) + (1 - 2c_x - 2c_y) T_{i,j}^k + c_q Q_v$$

$$\text{ここで、} c_x = \frac{a \Delta t}{\Delta x^2} \quad c_y = \frac{a \Delta t}{\Delta y^2} \quad c_q = \frac{\Delta t}{\rho c}$$

陰解法

$$T_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{1 + 2c_x + 2c_y} \left\{ c_x (T_{i+1,j}^{k+1} + T_{i-1,j}^{k+1}) + c_y (T_{i,j+1}^{k+1} + T_{i,j-1}^{k+1}) + T_{i,j}^k + c_q Q_v \right\}$$

$$\text{ここで、} a = \frac{\lambda}{\rho c} \quad c_x = \frac{a \Delta t}{\Delta x^2} \quad c_y = \frac{a \Delta t}{\Delta y^2} \quad c_q = \frac{\Delta t}{\rho c}$$