

アンケート結果

数量化Ⅲ類

	対象者.	カテゴリ		計
		洋食(b_1)	和食(b_2)	
サンプル	A(a_1)30歳代	1	0	1
	B(a_2)40歳代	1	1	2
	C(a_3)20歳代	1	0	1
	D(a_4)50歳代	0	1	1
	計	3	2	5

サンプルデータの分散

$$V_{aa} = \frac{a_1^2 + 2a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}{5}$$

平均値

$$\bar{a} = \frac{a_1 + 2a_2 + a_3 + a_4}{5}$$

カテゴリデータの分散

$$V_{bb} = \frac{3b_1^2 + 2b_2^2}{5}$$

平均値

$$\bar{b} = \frac{3b_1 + 2b_2}{5}$$

共分散

$$V_{ab} = \frac{a_1b_1 + a_2b_1 + a_2b_2 + a_3b_1 + a_4b_2}{5}$$

$$\text{相関係数 } R = \frac{V_{ab}}{\sqrt{V_{aa}}\sqrt{V_{bb}}}$$

2変量 a と b について、平均:0、分散:1に標準化する

$$\rightarrow \bar{a} = \bar{b} = 0 \quad V_{aa} = V_{bb} = 1$$

相関係数 $R = \frac{V_{ab}}{\sqrt{V_{aa}}\sqrt{V_{bb}}}$ を最大にする a_i 、 b_i を求める

制約式に係数をかけて
最大にしたいものから差し引く

ラグランジュの未定乗数法を用い

$$\begin{aligned} G &= V_{ab} - \frac{\lambda}{2}(V_{aa} - 1) - \frac{\mu}{2}(V_{bb} - 1) \\ &= \frac{a_1b_1 + a_2b_1 + a_2b_2 + a_3b_1 + a_4b_2}{5} - \frac{\lambda}{2} \left(\frac{a_1^2 + 2a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}{5} - 1 \right) - \frac{\mu}{2} \left(\frac{3b_1^2 + 2b_2^2}{5} - 1 \right) \end{aligned}$$

G を a_1 、 a_2 、 a_3 、 a_4 、 b_1 、 b_2 で偏微分して0おく

$$\frac{\partial G}{\partial a_1} = \frac{b_1 - \lambda a_1}{5} = 0 \dots \textcircled{1}$$

$$\frac{\partial G}{\partial a_2} = \frac{b_1 + b_2 - 2\lambda a_2}{5} = 0 \dots \textcircled{2}$$

$$\frac{\partial G}{\partial a_3} = \frac{b_1 - \lambda a_3}{5} = 0 \dots \textcircled{3}$$

$$\frac{\partial G}{\partial a_4} = \frac{b_2 - \lambda a_4}{5} = 0 \dots \textcircled{4}$$

$$\frac{\partial G}{\partial b_1} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 - 3\mu b_1}{5} = 0 \dots \textcircled{5}$$

$$\frac{\partial G}{\partial b_2} = \frac{a_2 - a_4 - 2\mu b_2}{5} = 0 \dots \textcircled{6}$$

$$\frac{\partial G}{\partial a_1} = \frac{b_1 - \lambda a_1}{5} = 0 \dots \textcircled{1}$$

$$\frac{\partial G}{\partial a_2} = \frac{b_1 + b_2 - 2\lambda a_2}{5} = 0 \dots \textcircled{2}$$

$$\frac{\partial G}{\partial a_3} = \frac{b_1 - \lambda a_3}{5} = 0 \dots \textcircled{3}$$

$$\frac{\partial G}{\partial a_4} = \frac{b_2 - \lambda a_4}{5} = 0 \dots \textcircled{4}$$

$$\frac{\partial G}{\partial b_1} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 - 3\mu b_1}{5} = 0 \dots \textcircled{5}$$

$$\frac{\partial G}{\partial b_2} = \frac{a_2 - a_4 - 2\mu b_2}{5} = 0 \dots \textcircled{6}$$

$$\textcircled{1} \times a_1 + \textcircled{2} \times a_2 + \textcircled{3} \times a_3 + \textcircled{4} \times a_4$$

$$a_1 b_1 + a_2 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_1 + a_4 b_2 - \lambda(a_1^2 + 2a_2^2 + a_3^2 + a_4^2) = a_1 b_1 + a_2 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_1 + a_4 b_2 - \lambda$$

$$\textcircled{5} \times b_1 + \textcircled{6} \times b_2$$

$$a_1 b_1 + a_2 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_1 + a_4 b_2 - \mu(3b_1^2 + 2b_2^2) = a_1 b_1 + a_2 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_1 + a_4 b_2 - \mu$$

以上より $\lambda = \mu$

$$a_1 = \frac{b_1}{\lambda} \quad a_2 = \frac{b_1 + b_2}{2\lambda} \quad a_3 = \frac{b_1}{\lambda} \quad a_4 = \frac{b_2}{\lambda}$$

⑤、⑥に代入

$$\left(\frac{b_1}{\lambda} + \frac{b_1 + b_2}{2\lambda} + \frac{b_1}{\lambda} - 3\lambda b_1\right) / 5 = 0$$

$$5b_1 + b_1 - 6\lambda^2 b_1 = 0$$

$$\frac{5}{6}(\sqrt{3}b_1) + \frac{1}{2\sqrt{6}}(\sqrt{2}b_2) - \lambda^2(\sqrt{3}b_1) = 0$$

$$\sqrt{3}b_1 = x_1 \quad \sqrt{2}b_2 = x_2 \quad \text{とおく}$$

$$\frac{5}{6}x_1 + \frac{1}{2\sqrt{6}}x_2 - \lambda^2 x_1 = 0$$

$$\left(\frac{b_1 + b_2}{2\lambda} + \frac{b_2}{\lambda} - 2\lambda b_2\right) / 5 = 0$$

$$b_1 + 3b_2 - 4\lambda^2 b_2 = 0$$

$$\frac{1}{2\sqrt{6}}(\sqrt{3}b_1) + \frac{3}{4}(\sqrt{2}b_2) - \lambda^2(\sqrt{2}b_2) = 0$$

$$\frac{1}{2\sqrt{6}}x_1 + \frac{3}{4}x_2 - \lambda^2 x_2 = 0$$

$$\frac{5}{6}x_1 + \frac{1}{2\sqrt{6}}x_2 - \lambda^2 x_1 = 0 \dots \textcircled{7}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{6}}x_1 + \frac{3}{4}x_2 - \lambda^2 x_2 = 0 \dots \textcircled{8}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{2\sqrt{6}} \\ \frac{1}{2\sqrt{6}} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda^2 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \begin{vmatrix} \frac{5}{6} - \lambda^2 & \frac{1}{2\sqrt{6}} \\ \frac{1}{2\sqrt{6}} & \frac{3}{4} - \lambda^2 \end{vmatrix} = 0$$

この式より、 $\lambda^2 = 1$, **0.583**を⑦及び⑧に代入して

$$\frac{5}{6}x_1 + \frac{1}{2\sqrt{6}}x_2 = 0.583x_1$$

$$\frac{1}{2\sqrt{6}}x_1 + \frac{3}{4}x_2 = 0.583x_2$$

$$x_1^2 + x_2^2 = 1$$

$$x_1 = 0.6325 \quad x_2 = -0.7746$$

$$a_1 = 0.478 \quad a_2 = -0.120 \quad a_3 = 0.478 \quad a_4 = -0.718 \quad b_1 = 0.365 \quad b_2 = -0.548$$

$$\text{相関係数 } R = \sqrt{\lambda^2} = \sqrt{0.583} = 0.763$$

$$a_1 = 0.478 \quad a_2 = -0.120 \quad a_3 = 0.478 \quad a_4 = -0.718 \quad b_1 = 0.365 \quad b_2 = -0.548$$

$$\text{相関係数 } R = \sqrt{\lambda^2} = \sqrt{0.583} = 0.763$$

カテゴリ	カテゴリスコア
洋食 (b_1)	0.365
和食 (b_2)	-0.548

サンプル	サンプルスコア
A(a_1) 30歳代	0.478
B(a_2) 40歳代	-0.120
C(a_3) 20歳代	0.478
D(a_4) 50歳代	-0.718

