

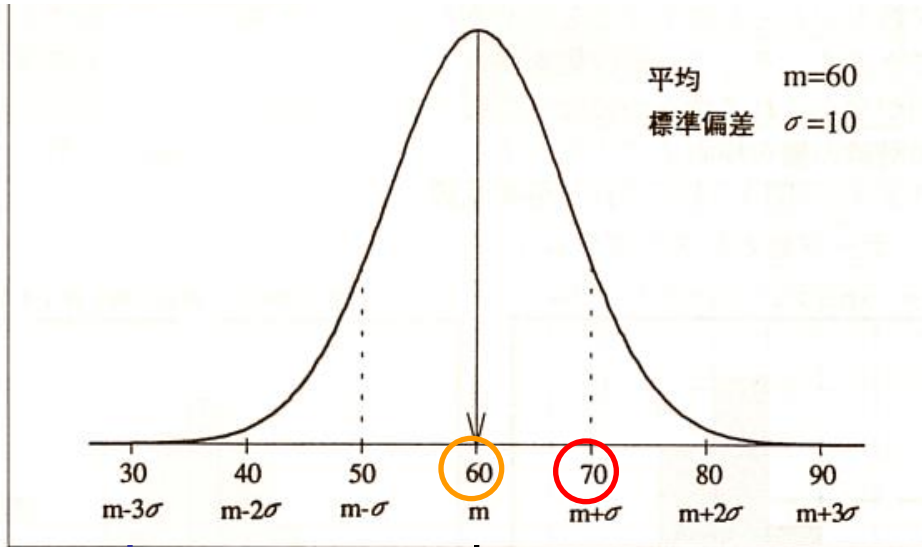
統計的検定 その2

出典:

「やさしい統計学の本まなぶ」

(著者: 菅民郎・檜山みぎわ 発行所: 現代数学社)

平均体重が60kg、標準偏差が10kgの分布



平均 $m=60$

標準偏差 $\sigma=10$

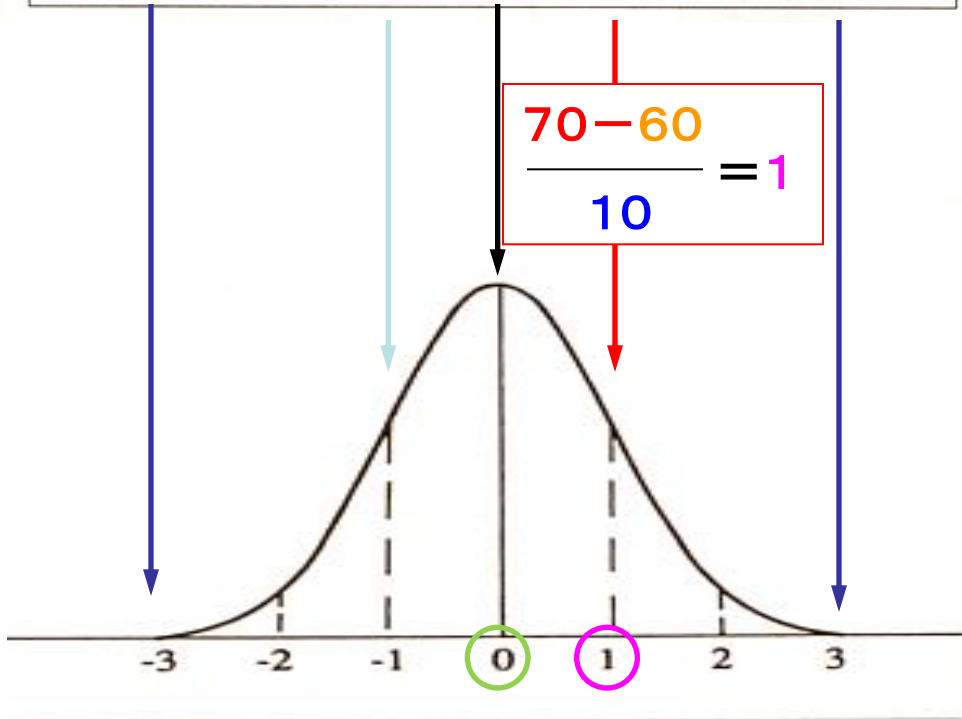
基準化(標準化) ★

$$\text{統計量 } T = \frac{\text{データ} - \text{平均値}}{\text{標準偏差}}$$

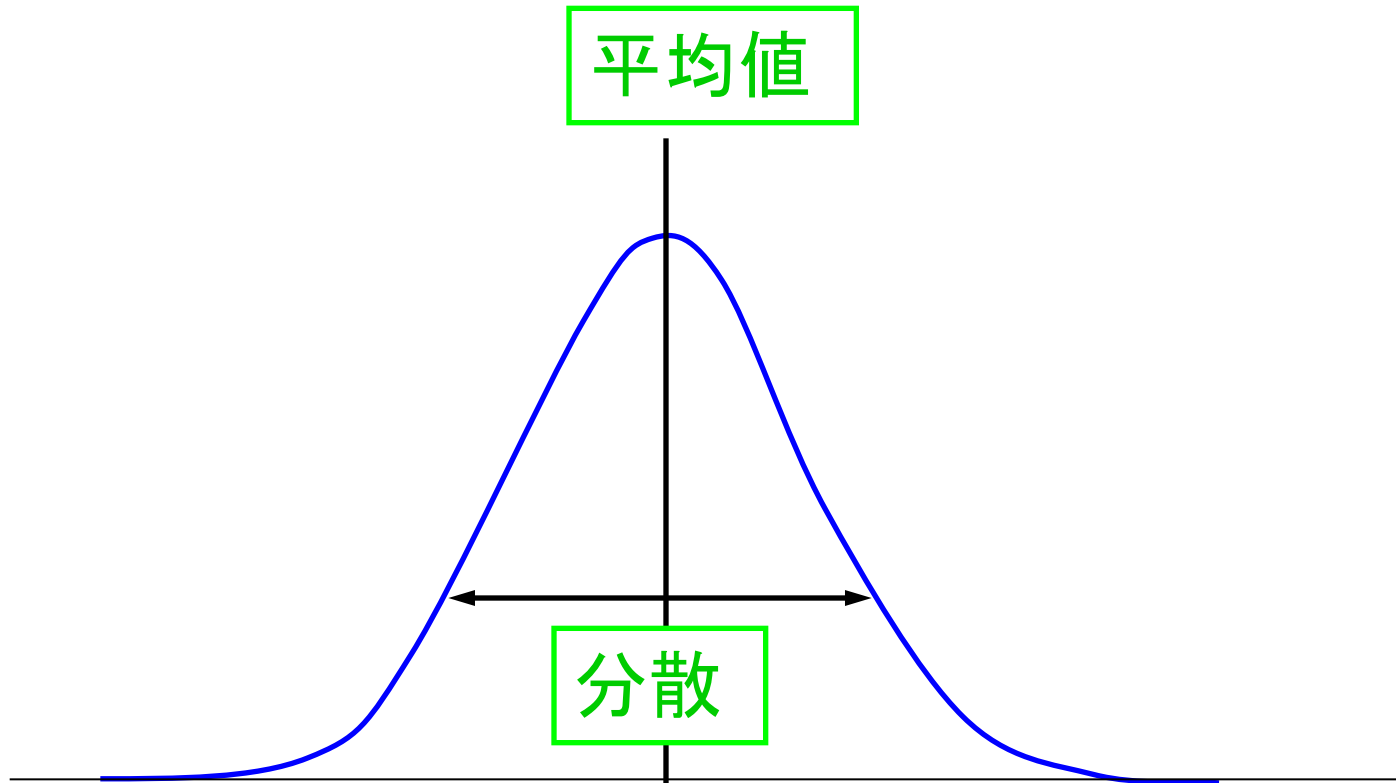
平均 $m=0$

標準偏差 $\sigma=1$

$$\frac{70 - 60}{10} = 1$$

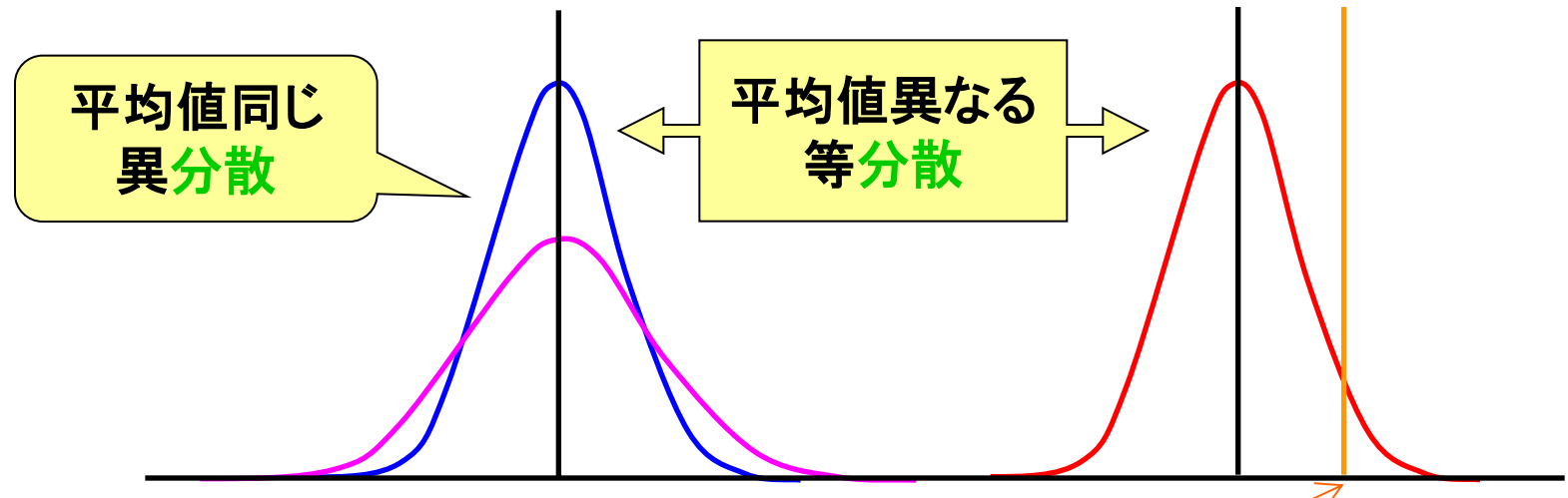


分布は、平均値と分散(ばらつき)で決まる



検定とは、「比較によって母集団の様子を推測すること」

平均値、分散



- 検定
- 1 標本の検定・・・ ある一定値と比較し、
差があるか無いか
 - 2 標本の検定・・・ 2つの集団を比較し、
差があるか無いか

平均値の検定

上限検定の場合

棄却域の閾値 $<$ 統計量 $\rightarrow$ 有意差あり

棄却域の閾値 $>$ 統計量 $\rightarrow$ 有意差あるとはいえない

①分布表から読取
(正規分布、t分布)



分布Aの平均値

棄却域の閾値

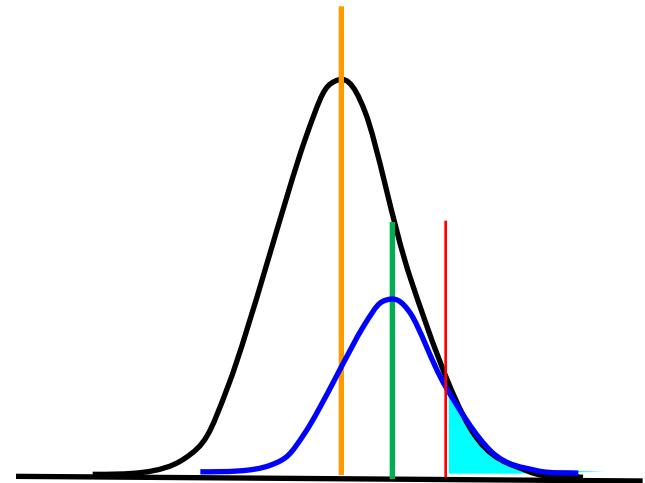
分布Bの平均値

棄却域

T: 統計量

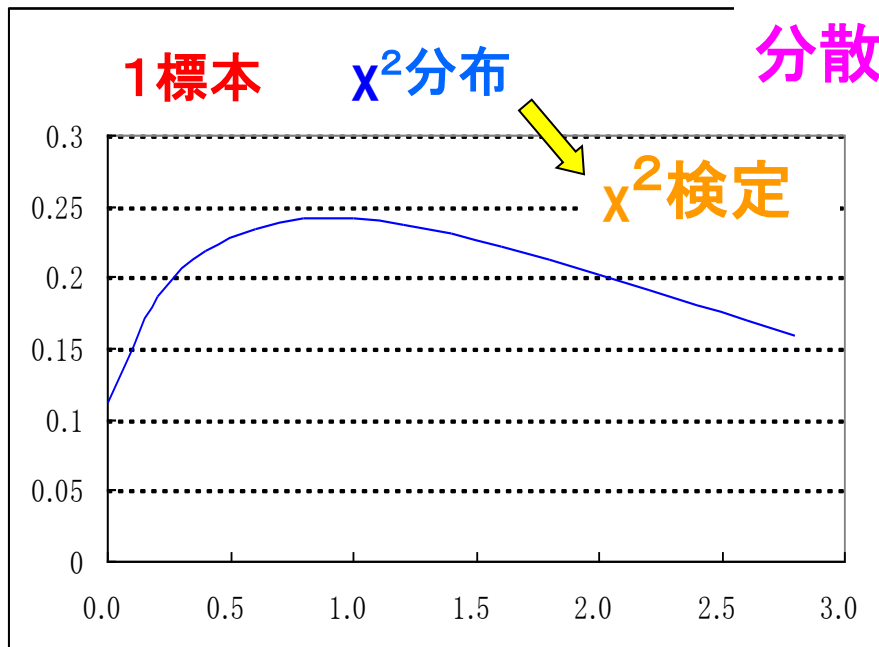
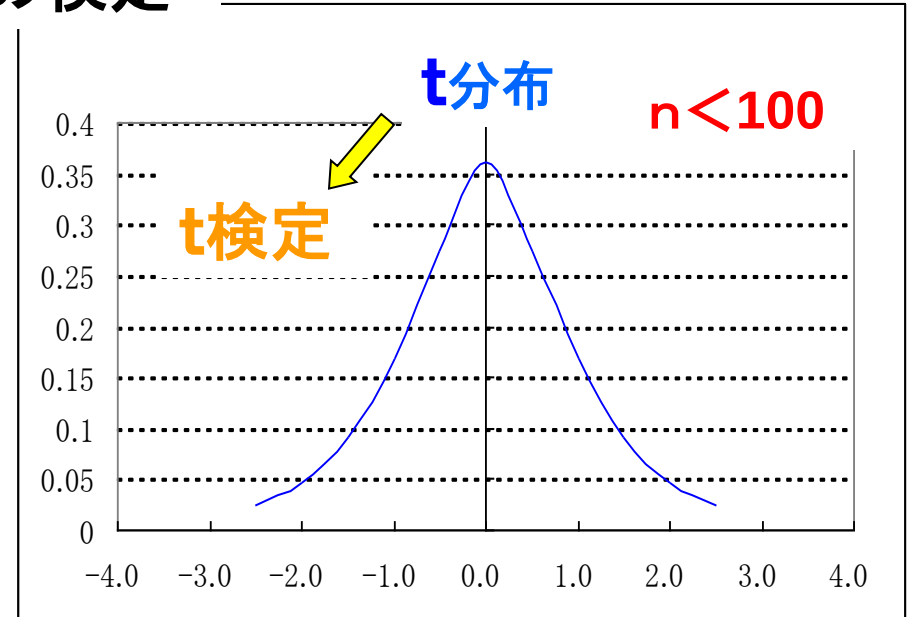
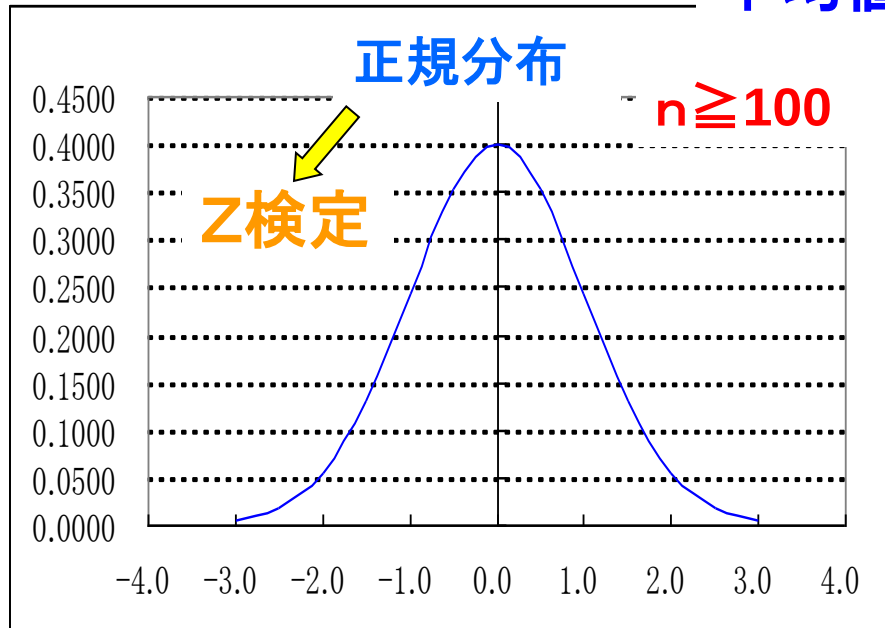


②平均値Bを基準化等の式でT: 統計量に変換

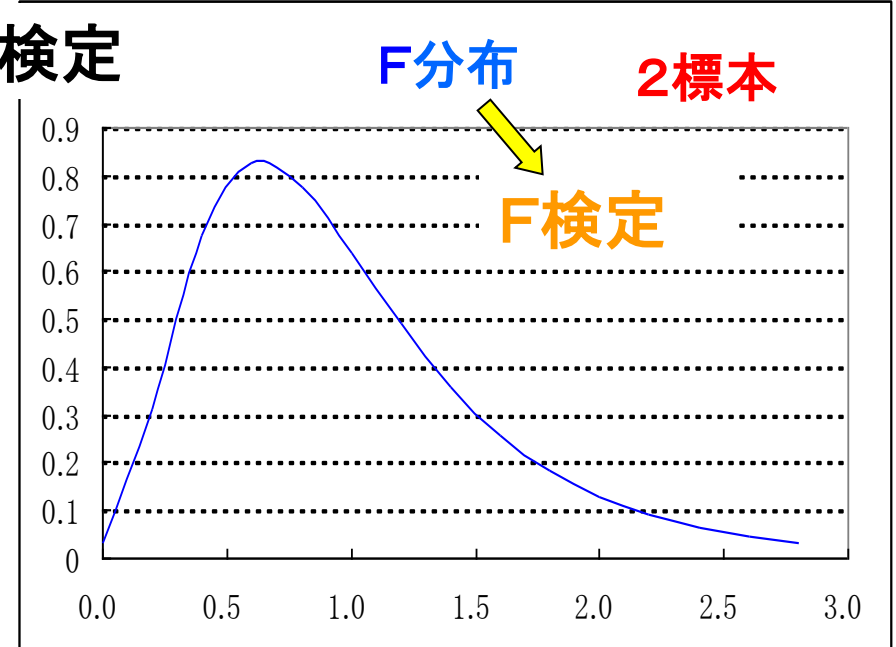


検定に使用する分布は？

平均値の検定



分散の検定



検定の手順

検定の基本手順

①帰無仮説、対立仮説を立てる

②有意水準(危険率) α を定める

③統計量を求める

④判定する

帰無仮説	Aの母平均 μ は比較値 m_0 と差がない	・・・1標本
対立仮説	$\mu \neq m_0$ 、 $\mu > m_0$ 、 $\mu < m_0$	
帰無仮説	Aの母平均 μ とBの母平均 μ_0 には差がない	・・・2標本
対立仮説	$\mu \neq \mu_0$ 、 $\mu > \mu_0$ 、 $\mu < \mu_0$	
帰無仮説	Aの母分散 σ とBの母分散 σ_0 には差がない	・・・2標本
対立仮説	$\sigma \neq \sigma_0$	

例 1標本の場合

帰無仮説 : ラーメンの平均価格は、比較値600円に等しい

対立仮説①: ラーメンの平均価格は、比較値600円に等しくない → 両側検定

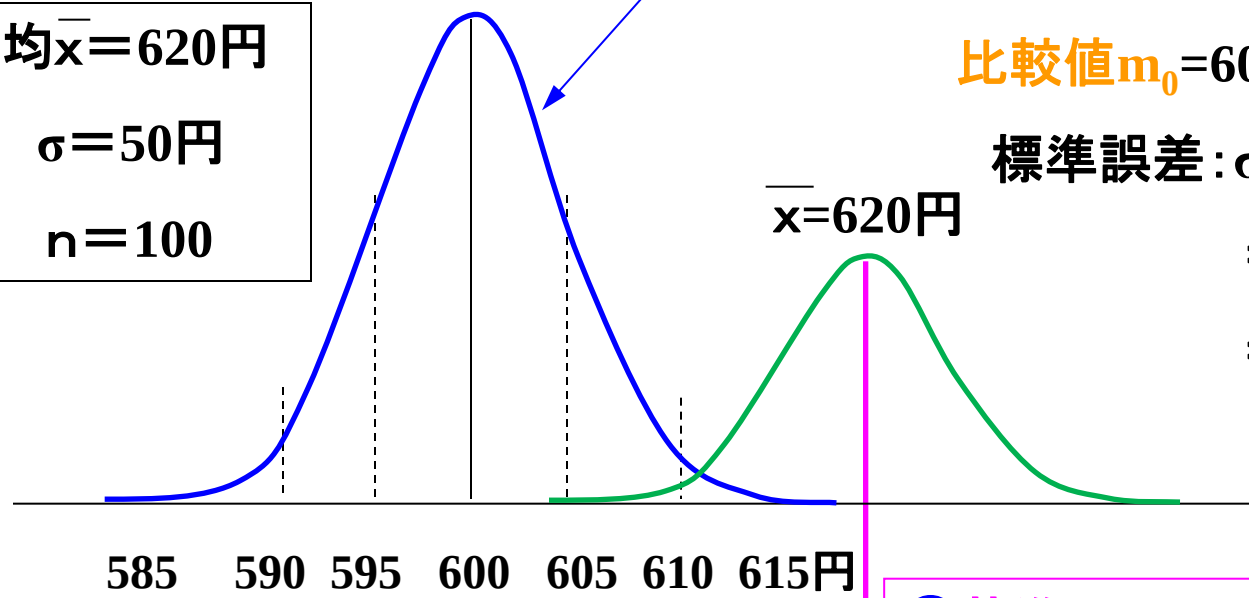
対立仮説②: ラーメンの平均価格は、比較値600円よりも高い → 右側検定

対立仮説③: ラーメンの平均価格は、比較値600円よりも低い → 左側検定

1 標本の場合、 $n \geq 100$ 母集団の標準偏差($\sigma = 50$ 円)既知 → Z検定

①帰無仮説: 東京のラーメンの平均価格は600円に等しい(差がない)

標本の平均 $\bar{x} = 620$ 円
標準偏差 $\sigma = 50$ 円
サンプル数 $n = 100$

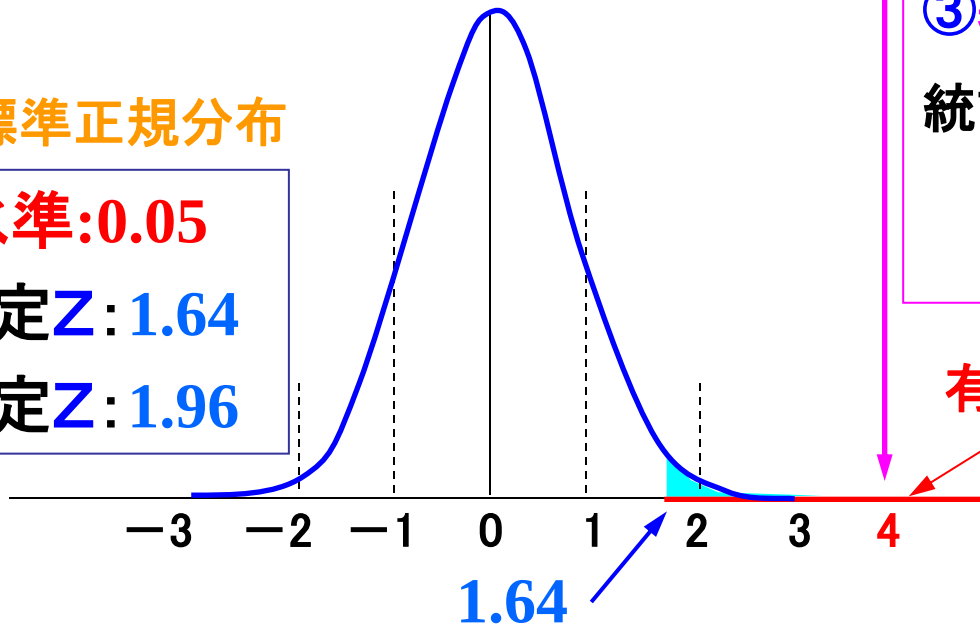


比較値 $m_0 = 600$ 円

標準誤差: $\sigma / \sqrt{n}$
 $= 50 / \sqrt{100}$
 $= 5$ 円

標準正規分布

②有意水準: 0.05
片側検定 Z: 1.64
両側検定 Z: 1.96



③基準化
統計量 $T = (\bar{x} - m_0) / (\sigma / \sqrt{n})$
 $= (620 - 600) / 5$
 $= 4$

有意水準0.05の棄却域

④ $T = 4 > 1.64$ (棄却)
P値 < 0.05 (棄却)

平均価格は600円より高い

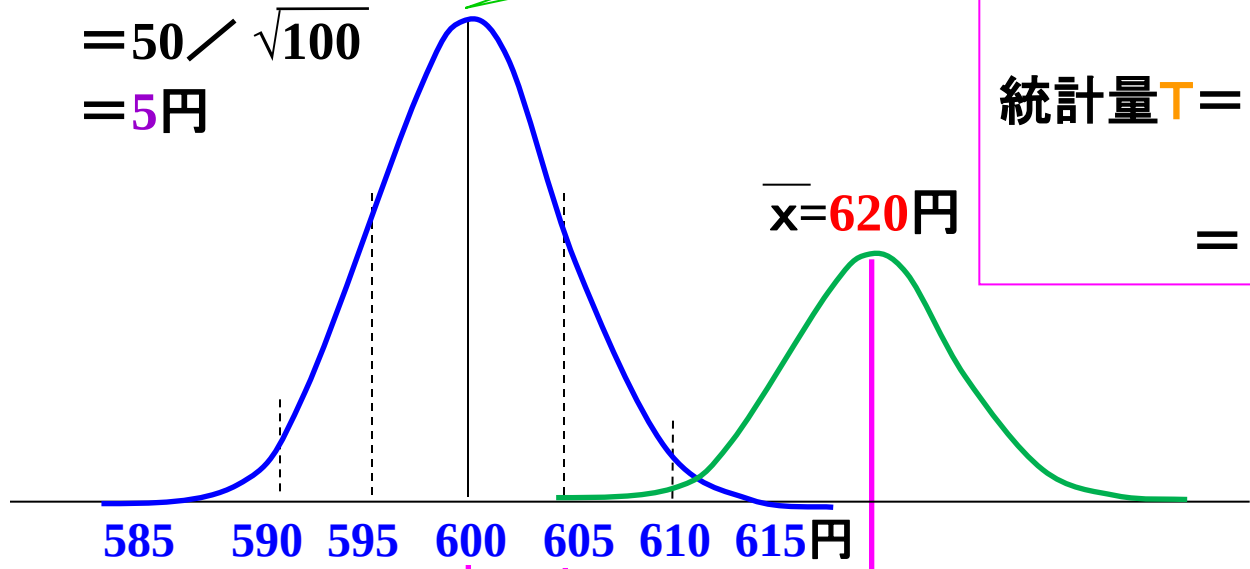
標本平均の標準偏差(標準誤差)

$$\sigma / \sqrt{n} \doteq s / \sqrt{n}$$
$$= 50 / \sqrt{100}$$
$$= 5 \text{円}$$

比較値

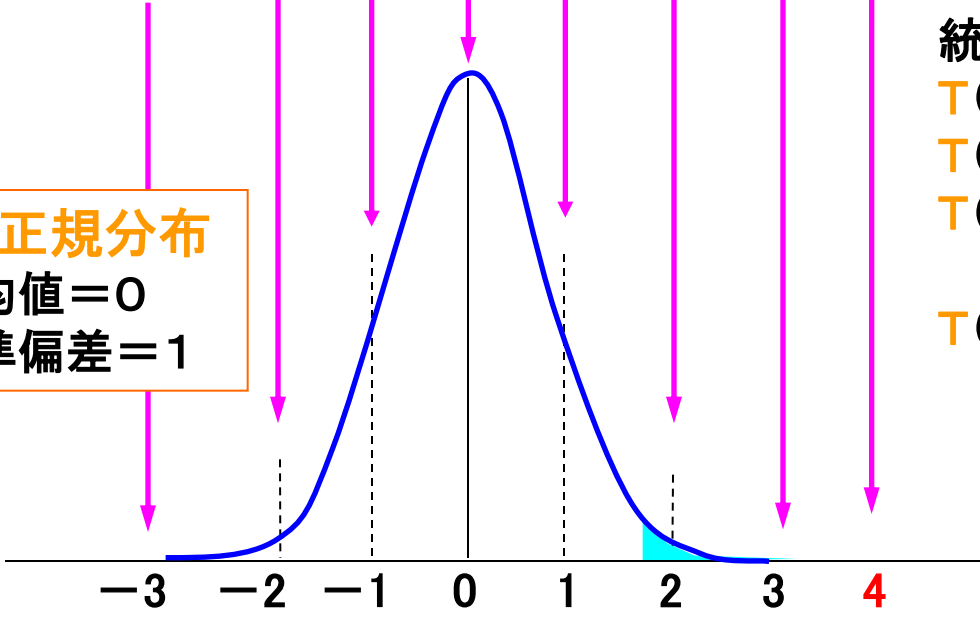
基準化

$$\text{統計量 } T = \frac{\text{データ} - \text{比較値}}{\text{標準誤差}}$$
$$= (\bar{x} - m_0) / (s / \sqrt{n})$$



標準正規分布
平均値=0
標準偏差=1

統計量	データ	比較値
$T(585)$	$(585 - 600) / 5 = -3$	
$T(600)$	$(600 - 600) / 5 = 0$	
$T(615)$	$(615 - 600) / 5 = 3$	
$T(620)$	$(620 - 600) / 5 = 4$	



棄却域限界のZ値

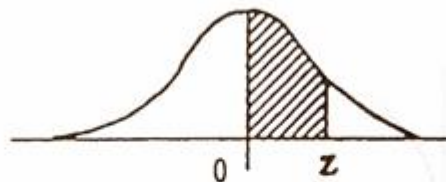
付表(1) 標準正規分布表

有意水準0.05(5%) = 信頼度95%

片側検定 $50 - 5 = 45\%$ → 1.64

両側検定 $50 - 5 / 2 = 47.5\%$ → 1.96

値Zに対する確率



1σの確率

$$0.34134 \times 2$$

$$= 0.68268$$

2σの確率

$$0.47725 \times 2$$

$$= 0.9545$$

3σの確率

$$0.49865 \times 2$$

$$= 0.9973$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.00000	0.00399	0.00798	0.01197	0.01595	0.01994	0.02392	0.02790	0.03188	0.03586
0.1	.03983	.04380	.04776	.05172	.05567	.05962	.06356	.06749	.07142	.07535
0.2	.07926	.08317	.08706	.09095	.09483	.09871	.10257	.10642	.11026	.11409
0.3	.11791	.12172	.12552	.12930	.13307	.13683	.14058	.14431	.14803	.15173
0.4	.15542	.15910	.16276	.16640	.17003	.17364	.17724	.18082	.18439	.18793
0.5	.19146	.19497	.19847	.20194	.20540	.20884	.21226	.21566	.21904	.22240
0.6	.22575	.22907	.23237	.23565	.23891	.24215	.24537	.24857	.25175	.25490
0.7	.25804	.26115	.26424	.26730	.27035	.27337	.27637	.27935	.28230	.28524
0.8	.28814	.29103	.29389	.29673	.29955	.30234	.30511	.30785	.31057	.31327
0.9	.31594	.31859	.32121	.32381	.32639	.32894	.33147	.33398	.33646	.33891
1.0	.34134	.34375	.34614	.34850	.35083	.35314	.35543	.35769	.35993	.36214
1.1	.36433	.36650	.36864	.37076	.37286	.37493	.37698	.37900	.38100	.38298
1.2	.38493	.38686	.38877	.39065	.39251	.39435	.39617	.39796	.39973	.40147
1.3	.40320	.40490	.40658	.40824	.40988	.41149	.41309	.41466	.41621	.41774
1.4	.41924	.42073	.42220	.42364	.42507	.42647	.42786	.42922	.43056	.43189
1.5	.43319	.43448	.43574	.43699	.43822	.43948	.44062	.44179	.44295	.44408
1.6	.44520	.44630	.44738	.44845	.44950	.45058	.45154	.45254	.45352	.45449
1.7	.45543	.45637	.45728	.45818	.45907	.45994	.46080	.46164	.46246	.46327
1.8	.46407	.46485	.46562	.46638	.46712	.46784	.46856	.46926	.46995	.47062
1.9	.47128	.47193	.47257	.47320	.47381	.47441	.47500	.47558	.47615	.47670
2.0	.47725	.47778	.47831	.47882	.47932	.47982	.48030	.48077	.48124	.48169
2.1	.48214	.48257	.48300	.48341	.48382	.48422	.48461	.48500	.48537	.48574
2.2	.48610	.48645	.48679	.48713	.48745	.48778	.48809	.48840	.48870	.48899
2.3	.48928	.48956	.48983	.49010	.49036	.49061	.49086	.49111	.49134	.49158
2.4	.49180	.49202	.49224	.49245	.49266	.49286	.49305	.49324	.49343	.49361
2.5	.49379	.49396	.49413	.49430	.49446	.49461	.49477	.49492	.49506	.49520
2.6	.49534	.49547	.49560	.49573	.49585	.49598	.49609	.49621	.49632	.49643
2.7	.49653	.49664	.49674	.49683	.49693	.49702	.49711	.49720	.49728	.49736
2.8	.49744	.49752	.49760	.49767	.49774	.49781	.49788	.49795	.49801	.49807
2.9	.49813	.49819	.49825	.49831	.49836	.49841	.49846	.49851	.49856	.49861
3.0	.49865	.49869	.49874	.49878	.49882	.49886	.49889	.49893	.49897	.49900
3.1	.49903	.49906	.49910	.49913	.49916	.49918	.49921	.49924	.49926	.49929

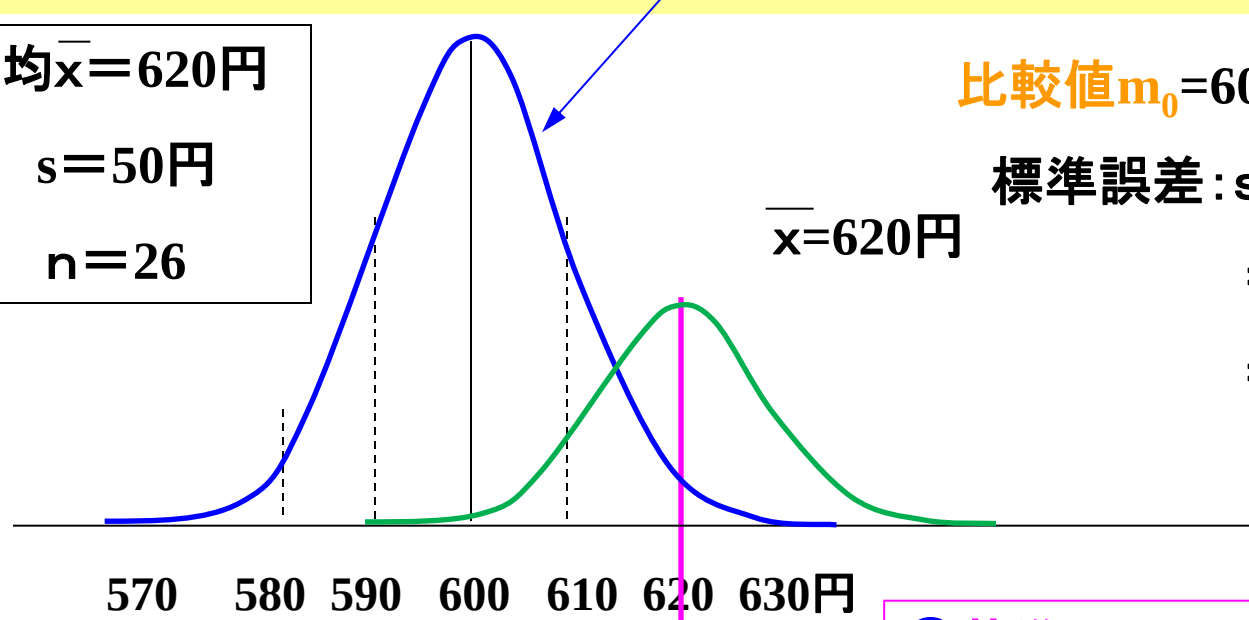
1 標本の場合、 $n < 100$ 母集団の標準偏差未知 → t検定

①帰無仮説: 母集団のラーメンの平均価格は600円に等しい(差がない)

標本の平均 $\bar{x} = 620$ 円
標準偏差 $s = 50$ 円
サンプル数 $n = 26$

比較値 $m_0 = 600$ 円

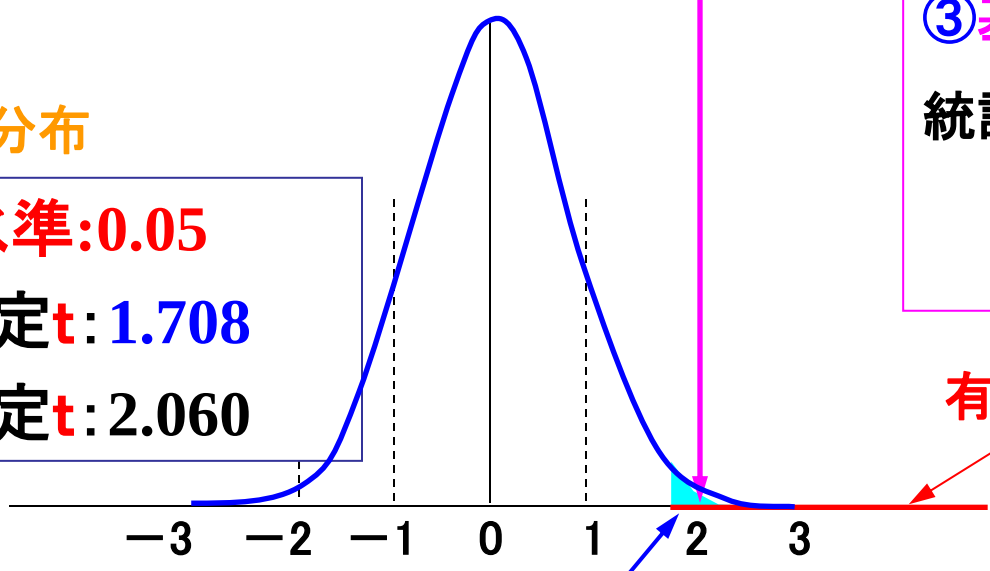
標準誤差: $s / \sqrt{n-1}$
 $= 50 / \sqrt{26-1}$
 $= 10$ 円



t分布

②有意水準: 0.05
片側検定 $t: 1.708$
両側検定 $t: 2.060$

③基準化
統計量 $T = (\bar{x} - m_0) / (\sigma / \sqrt{n})$
 $= (620 - 600) / 10$
 $= 2$



有意水準0.05の棄却域

④ $T = 2 > 1.708$ (棄却)
 P 値 < 0.05 (棄却)

自由度: $26 - 1 = 25$

1.708

平均価格は600円より高い

棄却域限界のt値

Excelの関数

TINV(確率、自由度)

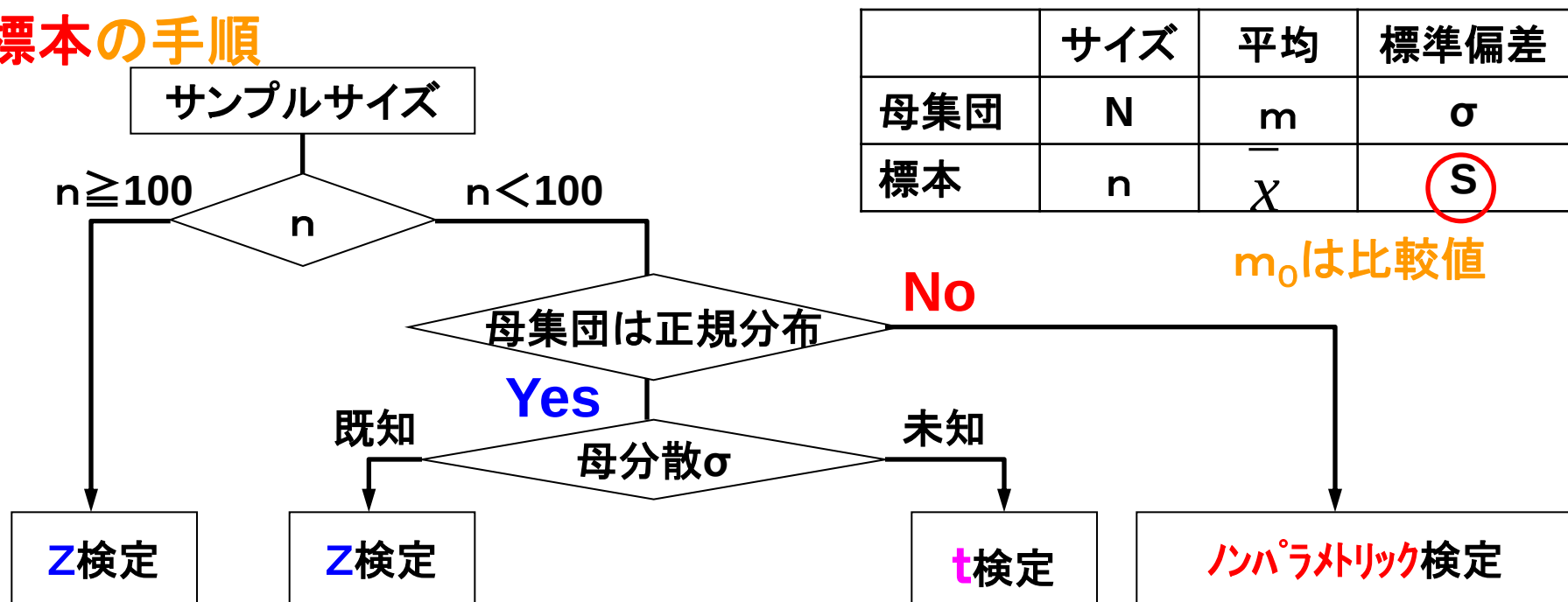
自由度	両側検定 $\alpha / 2 = 0.05$ 片側検定 α 0.1	両側検定 $\alpha / 2 = 0.025$ 片側検定 α 0.05
1	6.314	12.706
2	2.920	4.303
3	2.353	3.182
4	2.132	2.776
5	2.015	2.571
6	1.943	2.447
7	1.895	2.365
8	1.860	2.306
9	1.833	2.262
10	1.812	2.228
11	1.796	2.201
12	1.782	2.179
13	1.771	2.160
14	1.761	2.145
15	1.753	2.131
16	1.746	2.120
17	1.740	2.110
18	1.734	2.101
19	1.729	2.093
20	1.725	2.086
21	1.721	2.080
22	1.717	2.074
23	1.714	2.069
24	1.711	2.064
25	1.708	2.060
26	1.706	2.056
27	1.703	2.052
28	1.701	2.048
29	1.699	2.045
30	1.697	2.042

1 標本の検定に

どの公式を使うか？

母集団の分布 標本サイズ	正規分布		その他の分布
	σ既知	σ未知	
$n \geq 100$	Z検定	Z検定	Z検定
$n < 100$	Z検定	t検定	ノンパラメトリック検定

1標本の手順



$$T = \frac{\bar{x} - m_0}{\textcircled{s} / \sqrt{n}} \quad T = \frac{\bar{x} - m_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

σ未知の時は標本のsを使う

$$T = \frac{\bar{x} - m_0}{\textcircled{s} / \sqrt{n - 1}}$$

2標本の手順

検定したい2標本には

対応が**ある**か、

対応が**ない**か？



比較する2標本が

同じ集団か、

別の集団か？



例えば

A地区今年の中学2年と
昨年の中学1年の身長

A地区とB地区
の中学1年の身長

	石川	中村	山田	鈴木
標本1				
標本2				

標本1	石川	中村	山田	鈴木
標本2	小林	佐藤	加藤	田中

2標本の検定に

どの公式を使うか？

対応がある

母集団は正規分布か？

No

Yes

パラメトリック検定

ノンパラメトリック検定

t検定

p.30参照

ウィルコクソンのサインランク検定

p.32参照

EXCEL: TTEST(配列1, 配列2, 尾部, 検定の種類=1)

もしくは 分析ツール

対のデータを X_i と Y_i とし、その差 $d_i = X_i - Y_i$
平均を $\bar{d}$ とすると

$$\text{統計量 } T = \frac{|\bar{d}|}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (d_i - \bar{d})^2} / \sqrt{n(n-1)}}$$

対応がない

サンプルサイズ

	サイズ		平均		標準偏差	
母集団	N_1	N_2	m_1	m_2	σ_1	σ_2
標本	n_1	n_2	$\bar{X}_1$	$\bar{X}_2$	u_1	u_2

≥ 100

$n_1 + n_2$

< 100

母集団分布がわからなくとも

統計量Tは
標準正規分布に従う

母集団は正規分布か？

Yes

母分散差の検定

$$u^2 = \frac{(n_1 - 1)u_1^2 + (n_2 - 1)u_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

No

ノンパラメトリック検定

U検定

EXCEL: TTEST(配列1, 配列2, 尾部, 検定の種類)

検定の種類 = 2...等分散

検定の種類 = 3...異分散

共に既知

p.33参照

Z検定

$$T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

Z検定

$$T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{u^2}{n_1} + \frac{u^2}{n_2}}}$$

EXCEL:
分析ツール

Z検定

$$T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

共に未知

p.34参照

$\sigma_1 = \sigma_2$

t検定 2

$$T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{u^2}{n_1} + \frac{u^2}{n_2}}}$$

自由度
注意

$\sigma_1 \neq \sigma_2$

ウェルチt検定 3

$$T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{u_1^2}{n_1} + \frac{u_2^2}{n_2}}}$$

p.35参照

添字
なし

ノンパラメトリック検定

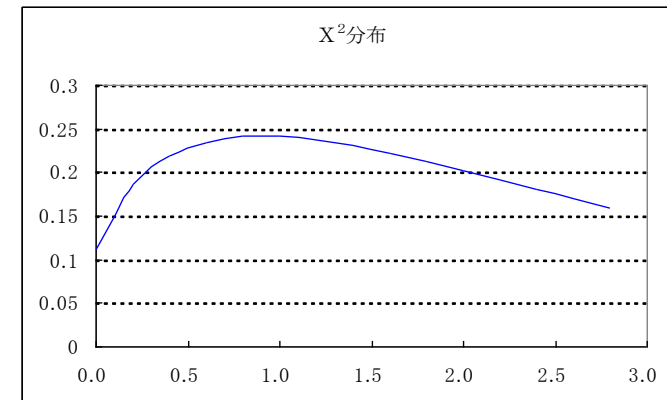
母集団の分布が**特定できない**とき

サンプル数が**少ない**とき

パラメトリック検定	Z検定 t検定	平均 比率
ノンパラメトリック検定	χ^2 検定 p.23参照 → p.37参照 → p.39,40参照 →	度数 ・適合度の検定 ・独立性の検定
	p.41参照 →	母分散の検定
	U検定 (対応有り) p.36参照 → サインランク検定 (対応なし) p.32参照 →	平均順位

χ^2 分布

統計量Tは χ^2 分布となる



$$\textcircled{1} T = \sum \frac{(\text{実測度数} - \text{期待度数})^2}{\text{期待度数}}$$

EXCEL: CHITEST(実測値範囲, 期待値範囲)

$$\textcircled{2} T = \frac{\text{標本サイズ} \times \text{標本分散}}{\text{母分散}}$$

←実験結果がこうなるはずだ
期待値からのズレを検定する

- ・適合度 p.37参照 →
- ・独立性 p.39,40参照 →

←母分散を検定をする

p.41参照 →

2つの分散比の検定

正規分布に従う母集団からの標本分散 u^2 は、標本サイズ n の値に関わらず、自由度 $n-1$ の χ^2 分布に従います。



分析ツール

A及びBの分散は χ^2 分布に従い、A及びBの分散比はF分布に従う

$$T = \frac{X_A^2 / \varphi_A}{X_B^2 / \varphi_B} = \frac{X_A^2 / (n_A - 1)}{X_B^2 / (n_B - 1)} = \frac{\text{Aの分散}}{\text{Bの分散}}$$

分散分析に利用

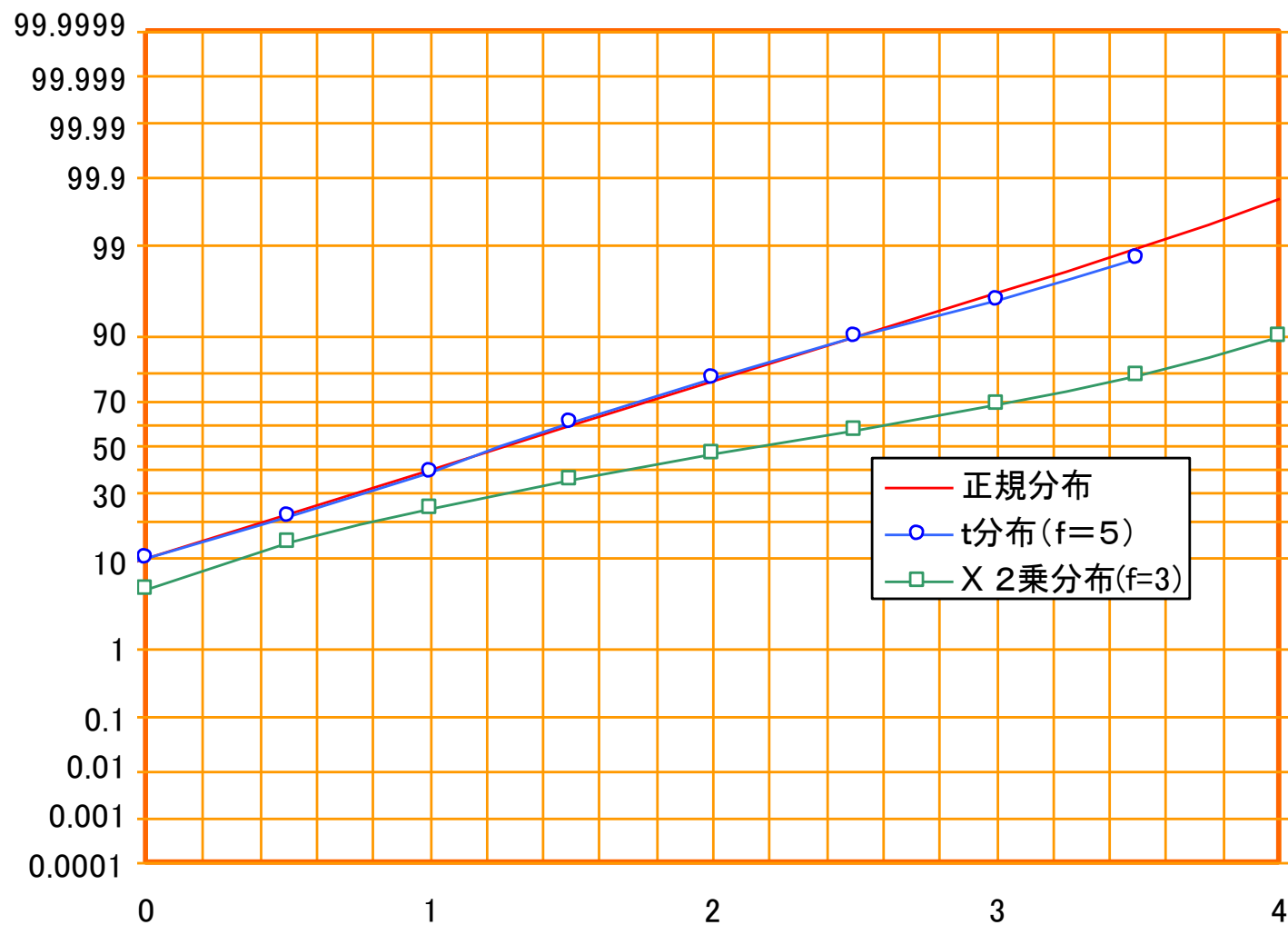
p.43参照



おまけ

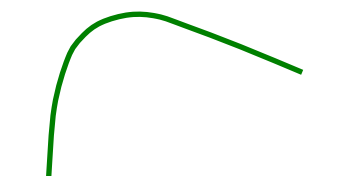
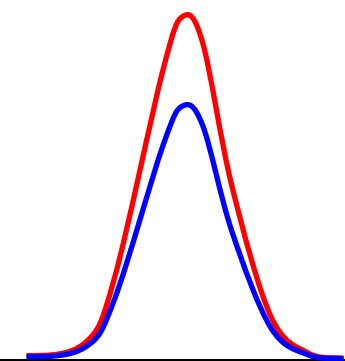
正規分布かどうかを判定
するためには？

正規確率紙



正規分布

t分布



X²乗分布

[]

[]

不用/夕

[illegible]

例題

対応あり、正規分布→ t検定

ある薬を投与して30分後に体温を測定したとき、投与前と投与後の体温に差があるかどうかを調べました。

10人をランダムに選び、右表のデータを得ましたが投与前後で体温に差があるといえるか？有意水準0.05で検定しなさい。

サンプル	投与前	投与後	差
A	38.5	37.9	0.6
B	36.3	35.1	1.2
C	37.1	37.0	0.1
D	37.5	36.6	0.9
E	39.6	38.6	1.0
F	35.4	36.0	-0.6
G	39.7	39.2	0.5
H	34.5	34.9	-0.4
I	36.5	36.2	0.3
J	36.3	35.5	0.8

$d_i - \bar{d}$	$(d_i - \bar{d})^2$
0.16	0.0256
0.76	0.5776
-0.34	0.1156
0.46	0.2116
0.56	0.3136
-1.04	1.0816
0.06	0.0036
-0.84	0.7056
-0.14	0.0196
0.36	0.1296
$\sum (d_i - \bar{d})^2$	3.1840
$\sqrt{\sum (d_i - \bar{d})^2}$	1.7844
$\sqrt{n(n-1)}$	9.4868
T	2.34

$$T = \frac{\left| \bar{d} \right|}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (d_i - \bar{d})^2} / \sqrt{n(n-1)}}$$

投与前後の差の平均値を0に基準化

棄却域は有意水準0.05の場合

自由度 $f = 10 - 1 = 9$

t分布表より、

$t(f, \alpha/2) = t(9, 0.05/2) = 2.262$

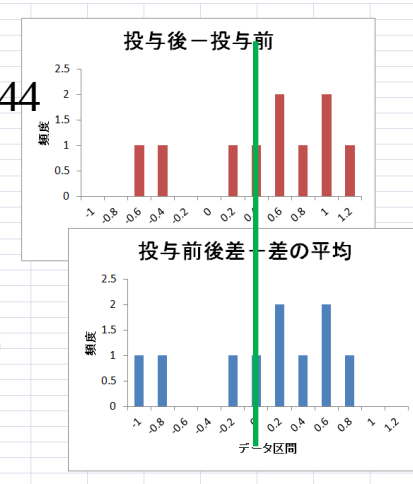
$T = 2.34 > 2.262 = t$ より、帰無仮説棄却

投与前と投与後で、平均体温には差がある

$\bar{d} = 0.44$



$\bar{d} = 0$



p.31参照

自由度 $f=9$ 、有意水準 $\alpha=0.05$ のときの t の値を求める

$$t = t(f, \alpha/2) = t(9, 0.05/2) = t(9, 0.025) = 2.262$$

付表(2) t 分布表



α	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005
0.5	10.27	41.14	164.56	1028.5	4114.0
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.196
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	1.337	1.746	2.119	2.582	2.921

対応あり、ノンパラメトリック→ ウィルコクソンのサインランク検定

10人に、A、Bふたつのアイスクリームを試食して、10点満点で評価してもらいました。AのアイスクリームはBより評価が高いといえるでしょうか？

評価者	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
アイスクリームA	9	7	8	5	7	6	4	5	10	8
アイスクリームB	6	5	6	7	6	7	7	8	8	5

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
アイスクリームA	9	7	8	5	7	6	4	5	10	8
アイスクリームB	6	5	6	7	6	7	7	8	8	5
評価得点の差	3	2	2	-2	1	-1	-3	-3	2	3
順位	7	3	4	5	1	2	8	9	6	10
順位(補正後)	8.5	4.5	4.5	4.5	1.5	1.5	8.5	8.5	4.5	8.5

差が同じ場合は、ランダムに順位を割り付け、補正

$$(1+2) \div 2 = 1.5$$

$$(3+4+5+6) \div 2 = 4.5$$

$$(7+8+9+10) \div 2 = 8.5$$

$$\text{得点差+} : 8.5+4.5+4.5+1.5+4.5+8.5=32 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{得点差-} : 4.5+1.5+8.5+8.5=23 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①及び②の小さい方を統計量j=23とする

有意水準0.05として、ウィルコクソンのサインランク検定表より

n=10に該当する値J=10

j=23 > 10=Jのため、帰無仮説は棄却できない。

よって、アイスクリームAの評価得点はBより高いとは言えない

東京都に住む20歳以上の人の中から

男性250人、女性200人をランダムに選び、

電化製品を5点満点で評価してもらいました。

その結果、男性は平均点2.72点、標準偏差1.00点

女性は平均点3.39点、標準偏差0.95点

評価に差があるといえるかどうか、有意水準0.05で検定しなさい

帰無仮説： 男性と女性の評価は同じ

標本サイズ $n_1 = 250$ 、 $n_2 = 200$

標本平均 $\bar{x}_1 = 2.72$ 、 $\bar{x}_2 = 3.39$

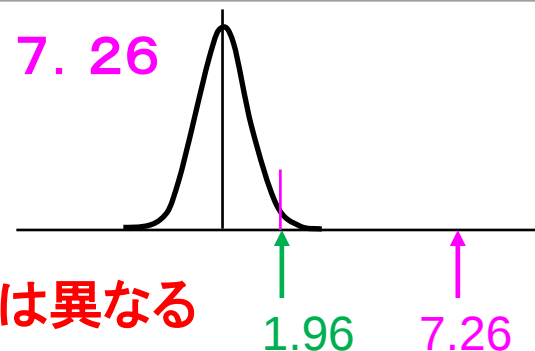
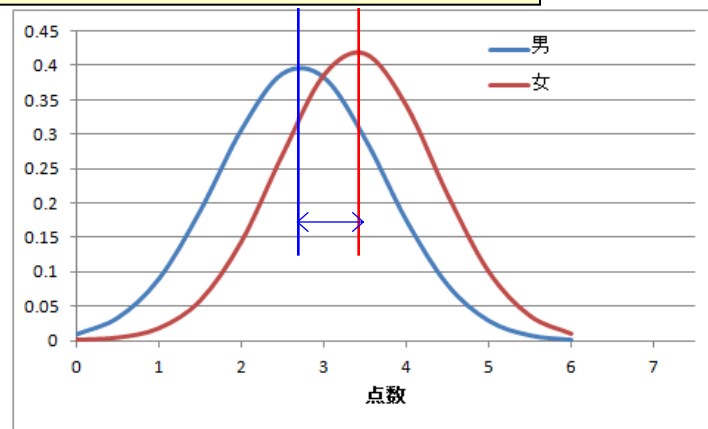
標本標準偏差 $u_1 = 1.00$ 、 $u_2 = 0.95$

統計量

$$T = \frac{\bar{x}_2 - \bar{x}_1}{\sqrt{\frac{u_1^2}{n_1} + \frac{u_2^2}{n_2}}} = \frac{3.39 - 2.72}{\sqrt{\frac{1}{250} + \frac{0.9025}{200}}} = 7.26$$

棄却域 両側検定 $Z(0.025) = 1.96$

比較 $|T| = 7.26 > 1.96$ 結論 男女の評価は異なる



$n < 100$ t検定 母集団の標準偏差未知

中学生の英語の学力に学校差があるかどうか見るために、A校25名、B校23名を無作為に選び、学力テスト結果を集計しました。A校の平均点72.4、B校の平均点68.2、得点の分散はA校100、B校81でした。

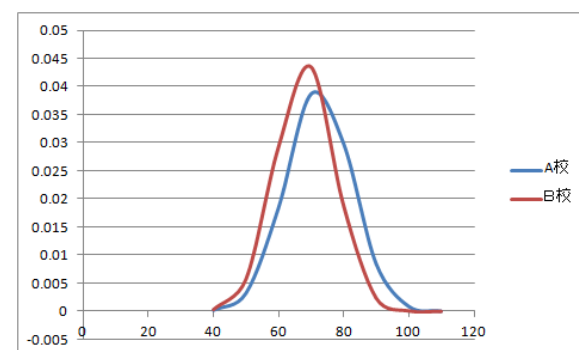
英語の学力に学校差はあるといえるかどうか、有意水準0.05で検定しなさい。ただし、過去のデータから、英語の成績のバラツキは学校間に差がないことはわかっています。

帰無仮説: A校とB校の英語の学力は等しい

標本サイズ $n_1 = 25$ 、 $n_2 = 23$

標本平均 $\bar{x}_1 = 72.4$ 、 $\bar{x}_2 = 68.2$

標本標準偏差 $u_1 = \sqrt{100} = 10$ 、 $u_2 = \sqrt{81} = 9$



$$u^2 = \frac{(n_1 - 1)u_1^2 + (n_2 - 1)u_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{(25 - 1)100 + (23 - 1)81}{25 + 23 - 2} = 90.9$$

統計量

$$T = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{u^2}{n_1} + \frac{u^2}{n_2}}} = \frac{72.4 - 68.2}{\sqrt{\frac{90.9}{25} + \frac{90.9}{23}}} = 1.53$$

棄却域 両側検定 $t(f, \alpha/2) = t(25 + 23 - 2, 0.025) = 2.103$

比較 $|T| = 1.53 < 2.103$ 結論 学校間の英語の学力は異なるといえない

$n < 100$ t検定 母集団の標準偏差未知

ある小学校で、1年生の身長に男女差があるかどうかを調べるために男子6名、女子4名を無作為に選び、身長を測定しました。

男子(cm) 124 120 122 116 118 120

女子(cm) 113 114 115 114

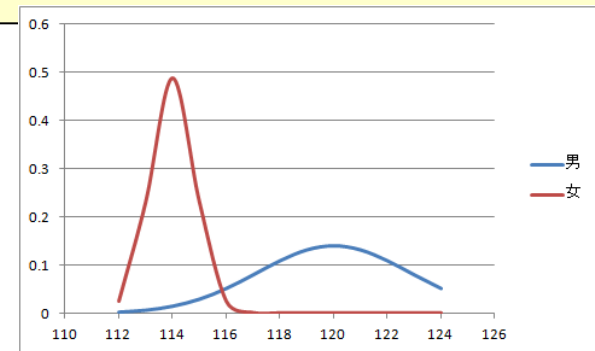
この結果から、この小学校の1年生の平均身長は女子より男子の方が高いといえるかどうか、有意水準0.05で検定しなさい。

帰無仮説: 男子と女子の平均身長は等しい

標本サイズ $n_1 = 6$ 、 $n_2 = 4$

標本平均 $\bar{x}_1 = 120$ 、 $\bar{x}_2 = 114$

標本分散 $u_1^2 = 8$ 、 $u_2^2 = 0.67$



自由度 $f = \left(\frac{u_1^2}{n_1} + \frac{u_2^2}{n_2} \right)^2 \div \left\{ \frac{u_1^4}{n_1^2 (n_1 - 1)} + \frac{u_2^4}{n_2^2 (n_2 - 1)} \right\} = 6.2$

統計量

$$T = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{u_1^2}{n_1} + \frac{u_2^2}{n_2}}} = \frac{120 - 114}{\sqrt{\frac{8}{6} + \frac{0.67}{4}}} = 4.9$$

棄却域 片側検定 $t(f, \alpha) = t(6, 0.05) = 1.943$

比較 $T = 4.9 > 1.943$ 結論 男子の方が女子より高いといえる

対応なし、ノンパラメトリック→ ウィルコクソンのU検定

うさぎとかめの3000m走のタイムに差があるかどうか調べました。
ランダムに各々40匹選んで走った結果以下の順位になりました。うさぎとかめの
のタイムに差が有るでしょうか？

うさぎ	23	1	13	8	18	3	28	10	33	16	6	19	30	35	4	38	12	21				
かめ	24	29	7	31	17	2	25	32	5	36	14	26	37	11	39	15	22	40	9	34	20	27

帰無仮説： うさぎとかめの平均順位は等しい

うさぎの順位和 $H = 23 + 1 + \dots + 12 + 21 = 318$

統計量 $U = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1 + 1)}{2} - H$

n_1 、 n_2 は標本サイズ

$$U = 18 \times 22 + \frac{18(18 + 1)}{2} - 318 = 249$$

Hはグループ1の順位和

$U = 249 > \frac{n_1 n_2}{2} = 198$ なのでUの代わりに $U' = n_1 n_2 - U = 147$ を用いる

$n_1 \geq 9$ 、 $n_2 \geq 9$ のとき平均値 $= n_1 n_2 / 2$ 、標準偏差 $= \sqrt{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1) / 12}$ の正規分布に従うことがわかっている

統計量 $T = \frac{U - \frac{n_1 n_2}{2}}{\sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)}{12}}} = -1.39$

$|T| = 1.39 < Z(\alpha / 2) = 1.96$ (両側検定)より

帰無仮説は棄却できない→ 差があるとはいえない

適合度の検定 パラメトリック検定 → χ^2 検定

ある大学で学生50人をランダムに選び、支持政党を調査したところ、下表の結果を得ました。この大学の学生は**特定の政党を支持する傾向を持つ**といえるでしょうか？有意水準0.05で検定しなさい。

政党	A	B	C	D	計
支持数	20	15	10	5	50

帰無仮説: $p_1=p_2=p_3=p_4=1 \div 4=0.25$ 各政党の支持率は等しい

政党	A	B	C	D	計
n_i	20	15	10	5	50
期待度数	$n \times p_1 = 12.5$	$n \times p_2 = 12.5$	$n \times p_3 = 12.5$	$n \times p_4 = 12.5$	

$$T = \sum \left(\frac{n_i - np_i}{np_i} \right)^2 = \frac{(20-12.5)^2}{12.5} + \frac{(15-12.5)^2}{12.5} + \frac{(10-12.5)^2}{12.5} + \frac{(5-12.5)^2}{12.5}$$

$$T = \sum \frac{(\text{実測度数} - \text{期待度数})^2}{\text{期待度数}} = \frac{7.5^2}{12.5} + \frac{2.5^2}{12.5} + \frac{(-2.5)^2}{12.5} + \frac{(-7.5)^2}{12.5} = 10$$

有意水準0.05 自由度 $f = C - 1 = 4 - 1 = 3$ χ^2 分布より

p.38参照 →

$T = 10 > 7.815 = \chi^2(f, \alpha) = \chi^2(3, 0.05)$ より帰無仮説は棄却

よって、この大学では、**各政党の支持率は等しくない(特定の政党を支持する傾向)**

χ^2 分布表

χ^2 分布表

	0.99	0.98	0.95	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40	0.30	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01	0.001
1	0.00016	0.00063	0.00393	0.01579	0.06418	0.14847	0.27500	0.45494	0.70833	1.07420	1.64238	2.70554	3.84146	5.41189	6.63490	10.82757
2	0.02010	0.04041	0.10259	0.21072	0.44629	0.71335	1.02165	1.38629	1.83258	2.40795	3.21888	4.60517	5.99146	7.82405	9.21034	13.81551
3	0.11483	0.18483	0.35185	0.58437	1.00517	1.42365	1.86917	2.36597	2.94617	3.66487	4.64163	6.25139	7.81473	9.83741	11.34487	16.26624
4	0.29711	0.42940	0.71072	1.06362	1.64878	2.19470	2.75284	3.35669	4.04463	4.87843	5.98862	7.77944	9.48773	11.66784	13.27670	18.46683
5	0.55430	0.75189	1.14548	1.61031	2.34253	2.99991	3.65550	4.35146	5.13187	6.06443	7.28928	9.23636	11.07050	13.38822	15.08627	20.51501
6	0.87209	1.13442	1.63538	2.20413	3.07009	3.82755	4.57015	5.34812	6.21076	7.23114	8.55806	10.64464	12.59159	15.03321	16.81189	22.45774
7	1.23904	1.56429	2.16735	2.83311	3.82232	4.67133	5.49323	6.34581	7.28321	8.38343	9.80325	12.01704	14.06714	16.62242	18.47531	24.32189
8	1.64650	2.03248	2.73264	3.48954	4.59357	5.52742	6.42265	7.34412	8.35053	9.52446	11.03009	13.36157	15.50731	18.16823	20.09024	26.12448
9	2.08790	2.53238	3.32511	4.16816	5.38005	6.39331	7.35703	8.34283	9.41364	10.65637	12.24215	14.68366	16.91898	19.67902	21.66599	27.87716
10	2.55821	3.05905	3.94030	4.86518	6.17908	7.26722	8.29547	9.34182	10.47324	11.78072	13.44196	15.98718	18.30704	21.16077	23.20925	29.58830

独立性の検定 パラメトリック検定 → χ^2 検定

ある都市の有権者200名について、支持政党と性別を調査したところ、下表の結果を得ました。性別と支持政党は関連があるといえるでしょうか？有意水準0.05で検定しなさい。

		支持政党		
		A	B	C
性別	男	50	20	10
	女	30	40	50

帰無仮説： 2つの分類項目は独立で関連がない(期待度数との差がない)

		支持政党			合計
		A	B	C	
性別	男	0.16	0.12	0.12	0.4
	女	0.24	0.18	0.18	0.6
合計		0.4	0.3	0.3	1.0

		期待度数 支持政党			合計
		A	B	C	
性別	男	32	24	24	80
	女	48	36	36	120
合計		80	60	60	200

$$T = \sum \frac{(\text{実測度数} - \text{期待度数})^2}{\text{期待度数}}$$

$$T = \sum_{j=1}^A \sum_{i=1}^B \frac{\left(n_{ij} - \frac{n_j \times n_i}{n}\right)^2}{\frac{n_j \times n_i}{n}}$$

$$T = \frac{(50 - 80 \times 80 \div 200)^2}{80 \times 80 \div 200} + \frac{(20 - 60 \times 80 \div 200)^2}{60 \times 80 \div 200} + \dots + \frac{(50 - 60 \times 120 \div 200)^2}{60 \times 120 \div 200} = 31.6$$

自由度 $f = (A - 1)(B - 1) = (2 - 1)(3 - 1) = 2$ 有意水準0.05のとき

$$T = 31.6 > 5.991 = \chi^2(f, \alpha) = \chi^2(2, 0.05)$$

p.38参照 →

帰無仮説を棄却する。性別と支持政党は独立でない。性別により支持政党が異なる傾向がある。

独立性の検定 パラメトリック検定 → χ^2 検定

開発中のある医薬品を、200症例についてテストしました。下表がその結果です。**この医薬品に効果があったといえるでしょうか？**有意水準0.05で検定しなさい。

	効果		計
	あり	なし	
投与	70	20	90
非投与	50	60	110
計	120	80	200

帰無仮説:「投与・非投与」と「効果あり・なし」は互いに独立である

$$T = \sum \frac{(\text{実測度数} - \text{期待度数})^2}{\text{期待度数}}$$

$$T = \sum_{j=1}^A \sum_{i=1}^B \frac{\left(n_{ij} - \frac{n_j \times n_i}{n}\right)^2}{\frac{n_j \times n_i}{n}} \quad T = \frac{(70-54)^2}{54} + \frac{(20-36)^2}{36} + \frac{(50-66)^2}{66} + \frac{(60-44)^2}{44} = 21.55$$

自由度 $f = (A-1)(B-1) = (2-1)(2-1) = 1$ 有意水準0.05のとき

$$T = 21.55 > 3.841 = \chi^2(f, \alpha) = \chi^2(1, 0.05)$$

p.38参照 →

帰無仮説を棄却する。「投与・非投与」と「効果あり・なし」は互いに独立でない。
この医薬品は効果があったといえる。

母分散の検定 → χ^2 検定

ある機械の部品の新製法が開発されました。新製法の部品からランダムに40個取り出し重量の標準偏差を計算すると22gでした。

旧製法の重量の標準偏差は30gでした。新製法の重量のバラツキは小さくなったといえるかどうか、有意水準0.05で検定しなさい。

帰無仮説: $\sigma^2 = \sigma_0^2 = 30^2$ 母分散は 30^2 に等しい

対立仮説: $\sigma^2 < \sigma_0^2 = 30^2$ 母分散は 30^2 より小さい

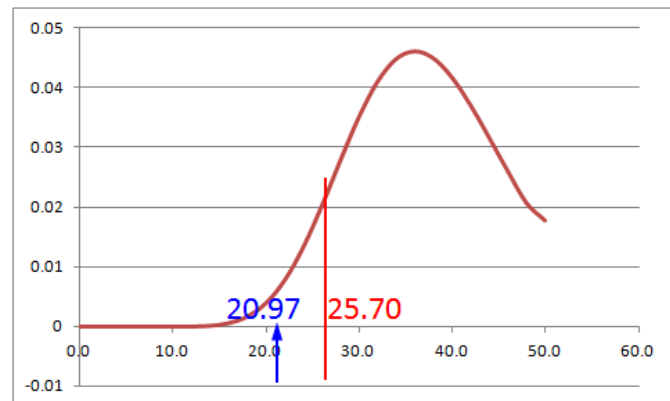
$$T = \frac{(n-1)u^2}{\sigma_0^2} = \frac{39 \times 22^2}{30^2} = 20.973 \quad T = \frac{\text{標本サイズ} \times \text{標本分散}}{\text{母分散}}$$

自由度 $f = n - 1 = 40 - 1 = 39$ 有意水準0.05のとき

$$T = 20.97 < 25.70 = \chi^2(n-1, 1-\alpha) = \chi^2(39, 0.95)$$

p.42参照 →

帰無仮説を棄却する。新製法による部品の重量バラツキは旧製法より小さくなったといえる。



χ^2 分布表

自由度	0.99	0.95	0.05	0.01
1	0.0002	0.0039	3.8415	6.6349
2	0.0201	0.1026	5.9915	9.2103
3	0.1148	0.3518	7.8147	11.3449
4	0.2971	0.7107	9.4877	13.2767
5	0.5543	1.1455	11.0705	15.0863
6	0.8721	1.6354	12.5916	16.8119
7	1.2390	2.1673	14.0671	18.4753
8	1.6465	2.7326	15.5073	20.0902
9	2.0879	3.3251	16.9190	21.6660
10	2.5582	3.9403	18.3070	23.2093
20	8.2604	10.8508	31.4104	37.5662
30	14.9535	18.4927	43.7730	50.8922
39	21.4262	25.6954	54.5722	62.4281
40	22.1643	26.5093	55.7585	63.6907
50	29.7067	34.7643	67.5048	76.1539
60	37.4849	43.1880	79.0819	88.3794
70	45.4417	51.7393	90.5312	100.4252
80	53.5401	60.3915	101.8795	112.3288
90	61.7541	69.1260	113.1453	124.1163
100	70.0649	77.9295	124.3421	135.8067

2つの分散比の検定 → F検定

A工程とB工程で製品重量を測定した結果を以下に示す。

両工程の分散の違いを有意水準0.05で検定しなさい。

A工程 20, 21, 18, 25, 17 [g]

B工程 16, 21, 31, 26, 28, 19 [g]

帰無仮説: $\sigma_A^2 = \sigma_B^2$ A工程とB工程は等分散である

$$V_A = \frac{\sum x_A^2 - \frac{(\sum x_A)^2}{n_A}}{n_A - 1} = 9.70$$
$$V_B = \frac{\sum x_B^2 - \frac{(\sum x_B)^2}{n_B}}{n_B - 1} = 33.1$$
$$= \frac{\sum (x_A - \bar{x})^2}{n_A - 1} = \frac{\sum (x_B - \bar{x})^2}{n_B - 1}$$

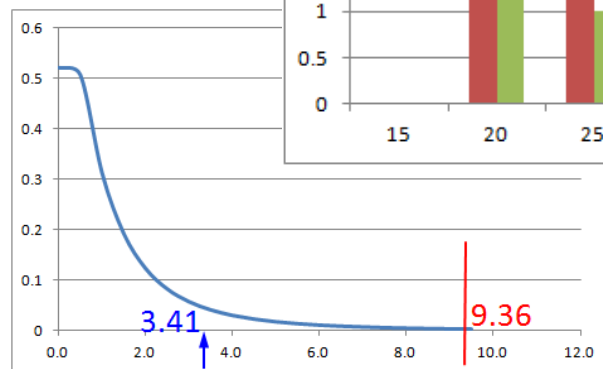
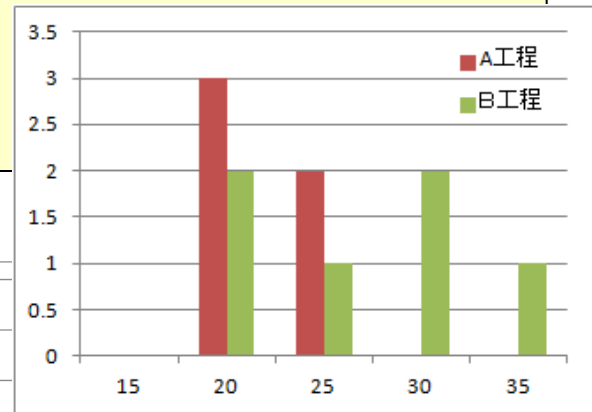
$$T = \frac{\text{大きい分散}}{\text{小さい分散}} = \frac{V_B}{V_A} = \frac{33.1}{9.70} = 3.41$$

自由度 $\varphi_A = n_A - 1 = 5 - 1 = 4$ $\varphi_B = n_B - 1 = 6 - 1 = 5$

F分布表から $F(\varphi_A, \varphi_B, \alpha/2) = F(5, 4, 0.025) = 9.36$

$T = 3.41 < 9.36 = F(5, 4, 0.025)$ より、帰無仮説は棄却できない。

すなわちA工程とB工程の分散に有意差はみられない



p.44参照

F分布表

分子の自由度

0.025

		分子の自由度									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
分母の自由度	1	647.789	799.500	864.163	899.583	921.848	937.111	948.217	956.656	963.285	968.627
	2	38.506	39.000	39.165	39.248	39.298	39.331	39.355	39.373	39.387	39.398
	3	17.443	16.044	15.439	15.101	14.885	14.735	14.624	14.540	14.473	14.419
	4	12.218	10.649	9.979	9.605	9.364	9.197	9.074	8.980	8.905	8.844
	5	10.007	8.434	7.764	7.388	7.146	6.978	6.853	6.757	6.681	6.619
	6	8.813	7.260	6.599	6.227	5.988	5.820	5.695	5.600	5.523	5.461
	7	8.073	6.542	5.890	5.523	5.285	5.119	4.995	4.899	4.823	4.761
	8	7.571	6.059	5.416	5.053	4.817	4.652	4.529	4.433	4.357	4.295
	9	7.209	5.715	5.078	4.718	4.484	4.320	4.197	4.102	4.026	3.964
	10	6.937	5.456	4.826	4.468	4.236	4.072	3.950	3.855	3.779	3.717

帰無仮説:
「癌でない」は「陰性」と同じである

	癌でない	癌である
陽性	1497	16
陰性	8483	4
合計	9980	20

α : 第1種の過誤(偽陽性)
あわてものの誤り
あわてて棄却

β : 第2種の過誤(偽陰性)
ぼんやりものの誤り
ぼんやりして見逃し

