$$1+2+3+4+\cdots\cdots=?$$

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\cdots\cdots=?$$

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots\cdots=?$$

リーマン予想

リーマンゼータ関数の零点が、負の偶数と、実部が 1/2 の複素数に限られる

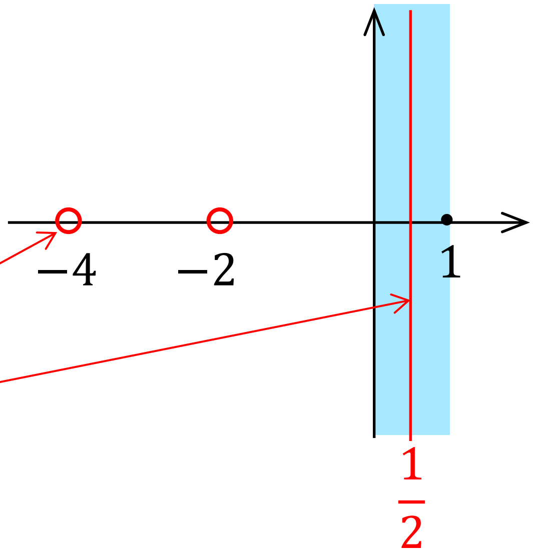
$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p:\text{素数}} \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

上記式はs>1で収束

解析接続により$s \leq 1$でも成り立つように拡張する

$\zeta(s)$ =0　となる複素数sが零点

$\zeta(-2) = \zeta(-4) = \cdots\cdots$ =0



素数：　2、3、5、7、9・・・71、73、79、83、89、97・・・

10万個の自然数の中で素数は約9.5%の9592個

桁数が増えるにつれて稀少、無数にあるか？

ゼータ関数

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_{p:\text{素数}}\frac{1}{1-p^{-s}}$$

$s=1$のとき　和　オイラー積

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\cdots\cdots=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{5}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{7}}\cdot\cdots\cdots$$

素数

$s=2$のとき

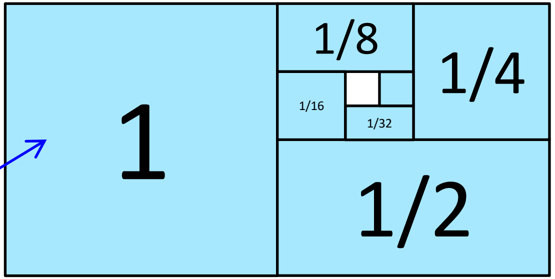
$$\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$$ ……バーゼル問題

$s=-1$のとき

$$\zeta(-1)=\frac{1}{1^{-1}}+\frac{1}{2^{-1}}+\frac{1}{3^{-1}}+\frac{1}{4^{-1}}+\cdots\cdots=1+2+3+4+\cdots\cdots=-\frac{1}{12}$$

∞では？

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\cdots\cdots=?$$



$$S=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\cdots$$

$$S-\frac{S}{2}=\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\cdots\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\cdots\right)$$

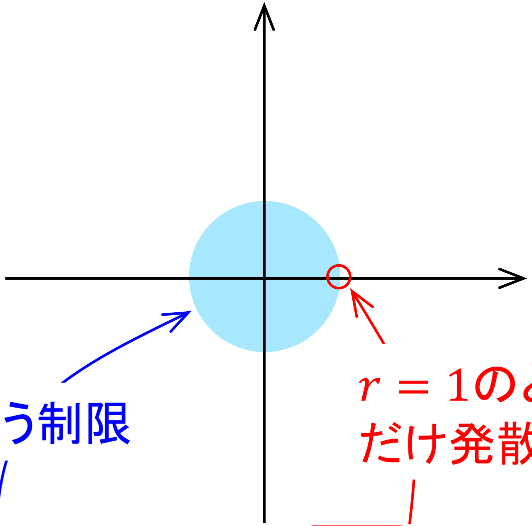
$$=\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\cdots\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots\cdots\right)$$

$$=1$$

$$S\left(1-\frac{1}{2}\right)=1$$

$$S=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)}=2$$

長方形の
面積が2



$|r|<1$という制限

$r=1$のとき
だけ発散

等比級数の和

$$\boxed{1+r+r^2+r^3+\cdots\cdots}=\boxed{\frac{1}{1-r}}$$

$$f(r)=g(r)$$

$f(r)$を$g(r)$に拡張することを
解析接続と呼ぶ

S= 1 + 2 + 3 + 4 + …… = ?

$$\begin{aligned} S-4S &= (1+2+3+4+\cdots\cdots) - 4(1+2+3+4+\cdots\cdots) \\ &= (1+2+3+4+\cdots\cdots) - 2(2+4+6+8+\cdots\cdots) \\ &= 1-2+3-4+\cdots\cdots \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$-3S = \frac{1}{4}$$

$$S = -\frac{1}{12}$$

等比級数の和

$$1 - s + s^2 - s^3 + \cdots\cdots = \frac{1}{1+s}$$

両辺微分して−1を掛ける

$$1 - 2s + 3s^2 - 4s^3 + \cdots\cdots = \frac{1}{(1+s)^2}$$

$s = 1$を代入して

$$1 - 2 + 3 - 4 + \cdots\cdots = \frac{1}{4}$$

$$1+2+3+4+\cdots\cdots=-\frac{1}{12}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\boxed{\frac{1}{1}}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\boxed{\frac{1}{4}}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{\mathbf{7}}+\frac{1}{8}+\boxed{\frac{1}{9}}+\cdots\cdots=\infty$$

大きな無限大

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots\cdots<2$$

小さな無限大