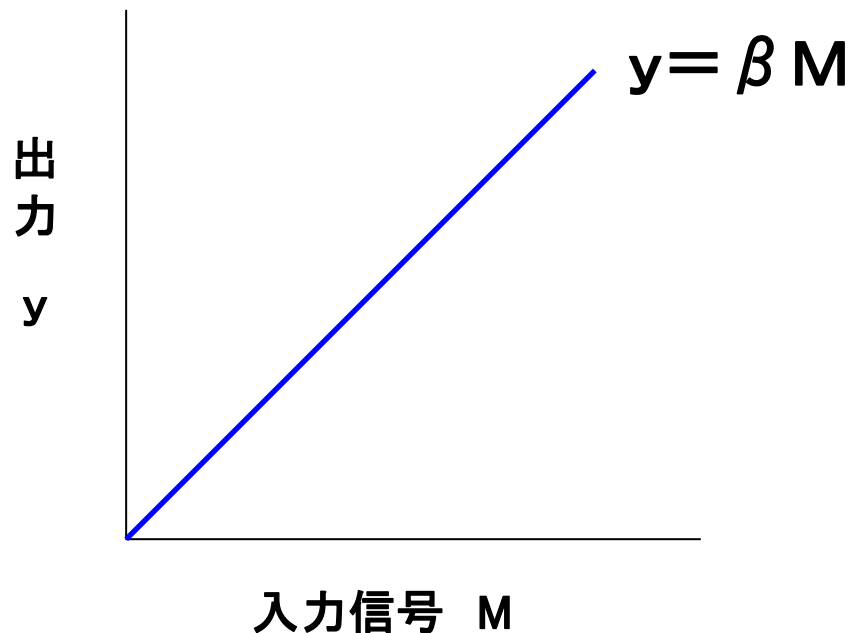


動特性について

(入出力の関係をもつ特性)



信号	M_1	M_2	M_3
出力	y_1	y_2	y_3

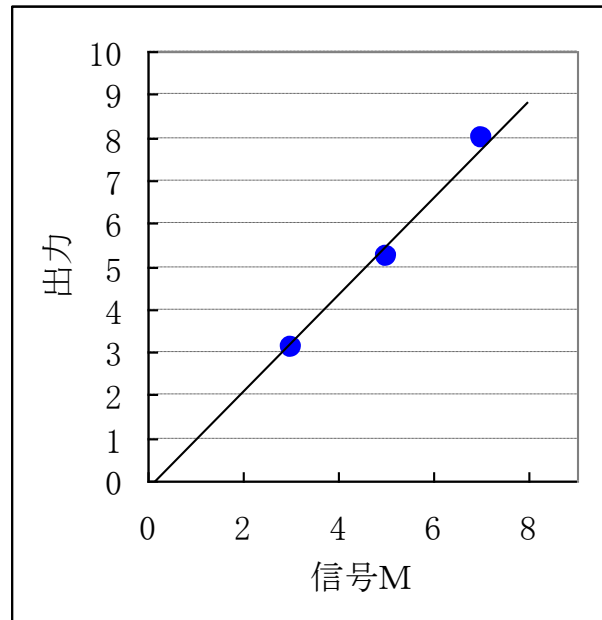
のときに直線の勾配 β を算出する


 勾配 $\beta = \frac{\sum M_i \times y_i}{\sum M_i^2} = \frac{M_1 \times y_1 + M_2 \times y_2 + M_3 \times y_3}{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2} = \frac{L}{r}$
 ←線形式と呼ぶ
 ←入力の大きさ

例題 下表の勾配 β を算出する

信号	3	5	7
出力 y_i	3.1	5.2	8.0

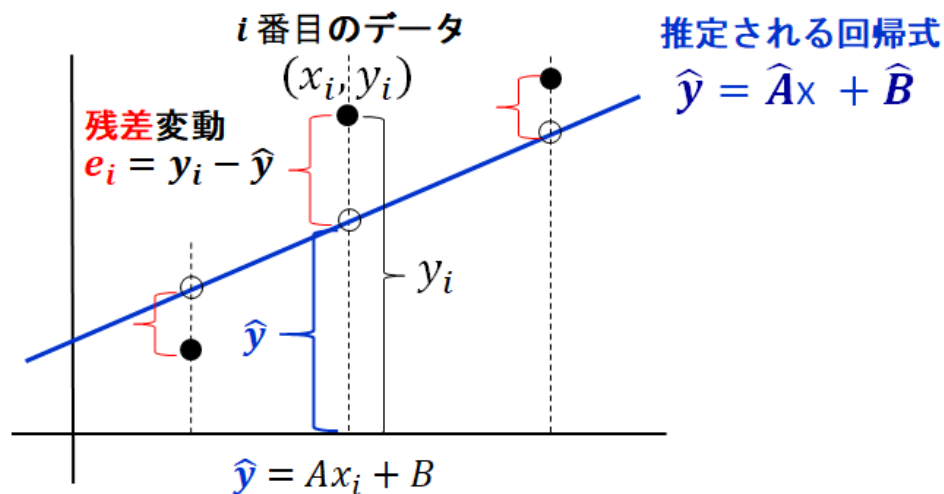
$$\text{勾配 } \beta = \frac{3 \times 3.1 + 5 \times 5.2 + 7 \times 8.0}{3^2 + 5^2 + 7^2} = \frac{91.3}{83} = 1.1$$



最小二乗法を用いて、回帰式を求めます

最小二乗法とは、

残差の平方和 $\sum_{i=1}^n \{y_i - (Ax_i + B)\}^2$ が最小となる回帰式の
AとBを求める手法



再掲

残差の平方和 $S = \sum_{i=1}^n \{y_i - (Ax_i + B)\}^2$ が最小となるのは

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^n \{y_i - (Ax_i + B)\}^2 = \sum_{i=1}^n \{y_i^2 - 2y_i(Ax_i + B) + (Ax_i + B)^2\} \\ &= \sum_{i=1}^n \{y_i^2 - 2Ax_iy_i - 2By_i + A^2x_i^2 + 2ABx_i + B^2\} \\ S &= A^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + nB^2 + \sum_{i=1}^n y_i^2 - 2A \sum_{i=1}^n x_iy_i - 2B \sum_{i=1}^n y_i + 2AB \sum_{i=1}^n x_i \end{aligned}$$

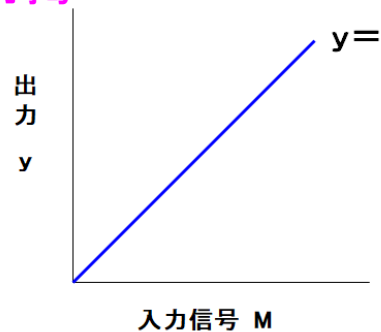
$$\frac{\partial S}{\partial A} = 2A \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2 \sum_{i=1}^n x_iy_i + 2B \sum_{i=1}^n x_i = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial B} = 2nB - 2 \sum_{i=1}^n y_i + 2A \sum_{i=1}^n x_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^n y_i - nB - A \sum_{i=1}^n x_i = 0$$

$$B = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i - \frac{A}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{n\bar{y}}{n} - \frac{nA\bar{x}}{n} = \bar{y} - A\bar{x}$$

再掲



$$\bar{x} = 0$$

$$\bar{y} = 0$$

$x_i \rightarrow M_i$ とおく

$$\text{勾配} \beta = \frac{\sum M_i \times y_i}{\sum M_i^2}$$

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i - A \sum_{i=1}^n x_i^2 - B \sum_{i=1}^n x_i = 0 \quad B = \bar{y} - A\bar{x} \text{ を代入して } A \text{ について解く}$$

$$A = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{y} \sum_{i=1}^n x_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x} \sum_{i=1}^n x_i} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y} - n\bar{x}\bar{y} + n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{x} \sum_{i=1}^n x_i + \bar{x} \sum_{i=1}^n x_i}$$

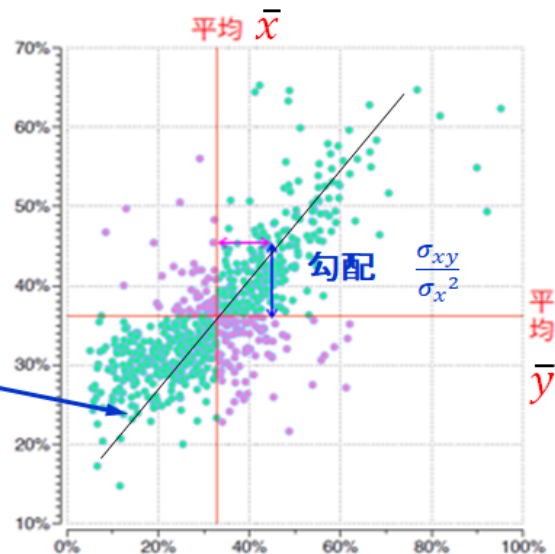
$$= \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{x} \sum_{i=1}^n y_i - \bar{y} \sum_{i=1}^n x_i + \bar{x}\bar{y} \sum_{i=1}^n 1}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - 2n\bar{x}^2 + n\bar{x}^2}$$

$$= \frac{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n}}{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}$$

最小二乗法の公式

$$y - \bar{y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} (x - \bar{x})$$

各点の平均値からの x 及び y の偏差の掛算（共分散）を x のばらつき（分散）で割ったもの



勾配 $\beta = 1.1$ を用いて、出力 βM_i 及び誤差 $y_i - \beta M_i$ を算出する

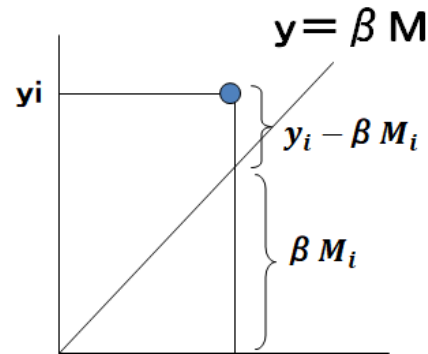
信号 M_i	3	5	7	$3^2 + 5^2 + 7^2 = 83$
出力 y_i	3.1	5.2	8.0	$3.1^2 + 5.2^2 + 8.0^2 = 100.65$
出力 βM_i	3.3	5.5	7.7	$3.3^2 + 5.5^2 + 7.7^2 = 100.43$
$y_i - \beta M_i$	-0.2	-0.3	0.3	$(-0.2)^2 + (-0.3)^2 + (0.3)^2 = 0.22$

$y_i^2 = (\beta M_i)^2 + (y_i - \beta M_i)^2$ が成り立っている

$$100.65 = 100.43 + 0.22$$

全出力 = 信号のエネルギー + ノイズのエネルギー

$$S_T (\text{全乗和}) = S_\beta (\text{信号の変動}) + S_e (\text{誤差変動})$$



付録 式の導出

M_i : 入力信号 y_i : 出力信号 β : 定数

$$y_i = \beta M_i = \beta M_i + (y_i - \beta M_i)$$

両辺2乗して

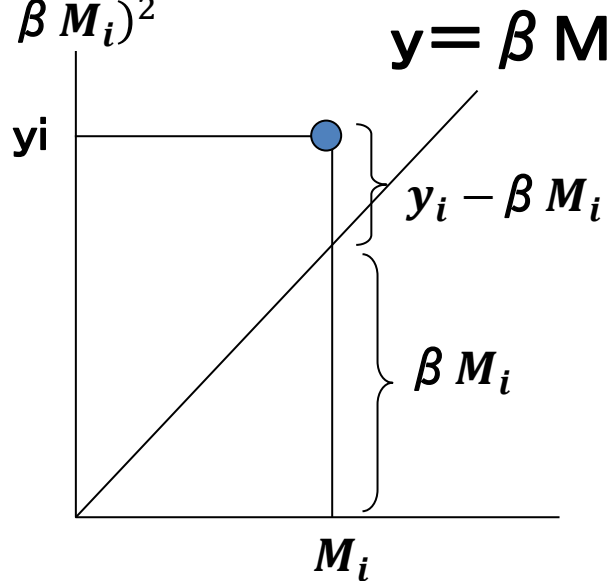
$$\sum y_i^2 = \sum \{\beta M_i + (y_i - \beta M_i)\}^2$$

$$= \sum (\beta M_i)^2 + \underline{2 \sum (\beta M_i) \times (y_i - \beta M_i)} + \sum (y_i - \beta M_i)^2$$

アンダーライン部分 $2 \sum (\beta M_i) \times (y_i - \beta M_i) = 0$ の時

$$\beta = \frac{\sum M_i \times y_i}{\sum M_i^2}$$

$$\sum y_i^2 = \sum (\beta M_i)^2 + \sum (y_i - \beta M_i)^2$$



SN比 η の公式

$$\eta = \frac{\text{Signal}}{\text{Noise}} = \frac{\beta^2}{\sigma^2}$$



品質工学では、以下の式を使いますので、**この形を覚えて下さい**

$$\star \eta = 10 \log \frac{\frac{1}{nr}(S_\beta - V_e)}{V_e} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \beta^2 \text{の推定値} \\ \leftarrow \sigma^2 \text{の推定値} \end{array}$$

単位: **db**

dBではない

S_β : 信号の変動

V_e : 誤差の分散

n : 反復数

r : 入力の大きさ

前述の例題のSN比 η を算出すると

$$S_T = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 100.65$$

S_β = 信号の変動

$$= (\beta M_1)^2 + (\beta M_2)^2 + (\beta M_3)^2 = \beta^2 (M_1^2 + M_2^2 + M_3^2) = 100.43$$

$$V_e = \frac{\text{誤差変動}}{\text{自由度}} = \frac{S_e}{f_e} = \frac{S_T - S_\beta}{f_e} = \frac{100.65 - 100.43}{3 - 1} = \frac{0.22}{2} = 0.11$$

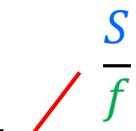
$$r = M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 = 83$$



$$\eta = 10 \log \frac{\frac{1}{nr}(S_\beta - V_e)}{V_e} \text{ に代入}$$

$$\eta = 10 \log \frac{\frac{1}{83}(100.43 - 0.11)}{0.11} = 10 \log 10.99 = 10.4 \text{ db}$$

分散分析表にまとめるとわかり易い

Source	f	S	V 
β	1	$S_\beta = 100.43$	
e	2	$S_e = 0.22$	$V_e = 0.11$
T	3	$S_T = 100.65$	

K=3、N=1でのSN比 η の算出式

信号	M ₁	M ₂	M ₃
出力	y ₁	y ₂	y ₃

$$\eta = 10 \log \frac{\frac{1}{r}(S_{\beta} - V_e)}{V_e}$$

K=k、N=nでのSN比 η の算出式

信号	M ₁	M ₂	M ₃	⋯⋯	M _k
出力1	y ₁₁	y ₂₁	y ₃₁	⋯⋯	y _{k1}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	y _{1n}	y _{2n}	y _{3n}	⋮	y _{kn}
合計	y ₁	y ₂	y ₃	⋯⋯	y _k

Source	f	S	V
β	1	S_{β}	V_{β}
e	$nk-1$	S_e	V_e
T	nk	S_T	

$\frac{S}{f}$ ★

$$S_T = y_{11}^2 + y_{12}^2 + \cdots + y_{kn}^2 \quad (f = nk)$$

$$S_{\beta} = \frac{L^2}{nr} = \frac{(M_1 y_1 + M_2 y_2 + \cdots + M_k y_k)^2}{n(M_1^2 + M_2^2 + \cdots + M_k^2)} \quad (f = 1)$$

$$S_e = S_T - S_{\beta} \quad (f = nk - 1)$$

★
$$\eta = 10 \log \frac{\frac{1}{nr}(S_{\beta} - V_e)}{V_e}$$