バッキンガムのπ定理

物理現象は、無次元数を組み合わせることで記述できる

通常の式

$$L = vt$$

L: 歩いた距離$[m]$
v: 歩く速度$[\mathrm{m}/s]$
t: 時間[s]

以下の値を用いて上式を書き換える

L_0: 全行程距離
v_0: 歩く標準速度$[\mathrm{m}/s]$
r_v: 標準速度に対する比

$$\frac{L[\cancel{m}]}{L_0[\cancel{m}]} = \frac{r_v \times v_0[\cancel{\mathrm{m}}/\cancel{s}] \times t[\cancel{\mathrm{s}}]}{L_0[\cancel{m}]}$$

無次元数＝現象の物理量－基本単位数

無次元の式

$\pi_1 = \frac{L}{L_0}$　$\pi_2 = \frac{vt}{L_0}$　とおいて

$$\pi_1 = r_v \pi_1$$

物理量	記号	次元式
熱伝達率	h	$M/(S^3)$
流体密度	ρ	M/L^3
定圧比熱	C_p	$L^2/(S^2T)$
代表寸法	D	L
流体の熱伝導率	λ	$ML(S^3T)$
流速	v	L/S
粘性係数	μ	M/(LS)

M, L, S, Tの4つ

無次元数＝現象の物理量－基本単位数＝7 －4 ＝3

①hに関する式を導出する→無次元数π_1とする

②ρとC_p →無次元数π_2、π_3とおく

③ h、ρとC_pを除いたD、λ、v及びμを用いてπ_1、π_2及びπ_3を表す

→次ページ

$$\pi_1 = \frac{h}{D^{a_1}\lambda^{b_1}\mathrm{V}^{c_1}\mu^{d_1}}$$
$$\pi_2 = \frac{\rho}{D^{a_2}\lambda^{b_2}\mathrm{V}^{c_2}\mu^{d_2}}$$
$$\pi_3 = \frac{C_p}{D^{a_3}\lambda^{b_3}\mathrm{V}^{c_3}\mu^{d_3}}$$

分母の次元は

$$L^a\left[\frac{ML}{S^3T}\right]^b\left[\frac{L}{S}\right]^c\left[\frac{M}{LS}\right]^d$$
$$= M^{b+d}L^{a+b+c-d}S^{-3b-c-d}$$

$$\pi_1 = \frac{M^1L^{-3}S^{-1}}{M^{b+d}L^{a+b+c-d}S^{-3b-c-d}}$$
$$\pi_2 = \frac{M^1L^{-3}}{M^{b+d}L^{a+b+c-d}S^{-3b-c-d}}$$
$$\pi_3 = \frac{L^2S^{-2}T^{-1}}{M^{b+d}L^{a+b+c-d}S^{-3b-c-d}}$$

π_1について

$M \quad 1 = b_1 + d_1$

$L \quad 0 = a_1 + b_1 + c_1 - d_1$

$S \quad -3 = -3b_1 - c_1 - d_1$

$T \quad -1 = -b_1$ を解くと

$a_1 = -1,\ b_1 = 1,\ c_1 = 0,\ d_1 = 0$

よって$\pi_1 = \dfrac{h}{D^{-1}\lambda^1\mathrm{V}^0\mu^0}$

$$= \frac{hD}{\lambda} = Nu\text{数}$$

π_2について

$M \quad 1 = b_2 + d_2$

$L \quad -3 = a_2 + b_2 + c_2 - d_2$

$S \quad 0 = -3b_2 - c_2 - d_2$

$T \quad 0 = -b_2$ を解くと

$a_2 = -1,\ b_2 = 0,\ c_2 = -1,\ d_2 = 1$

よって$\pi_2 = \dfrac{\rho}{D^{-1}\lambda^0\mathrm{V}^{-1}\mu^1}$

$$= \frac{D\mathrm{V}\ \rho}{\mu} = \frac{D\mathrm{V}}{\nu} = Re\text{数}$$

π_3について

$$M \quad 0 = b_3 + d_3$$
$$L \quad 2 = a_3 + b_3 + c_3 - d_3$$
$$S \quad -2 = -3b_3 - c_3 - d_3$$
$$T \quad -1 = -b_3$$ を解くと

$$a_3 = 0,\ b_3 = 1,\ c_3 = 0,\ d_3 = -1$$

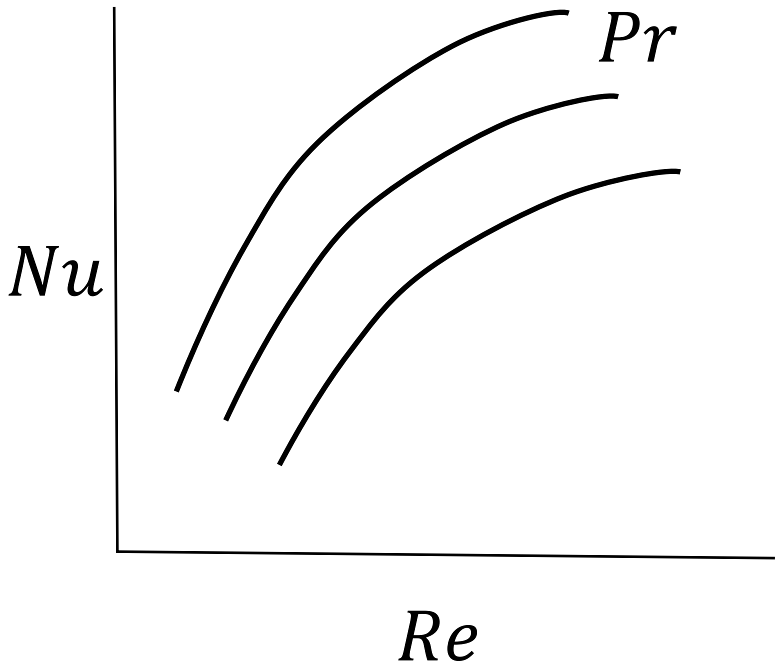
よって$\pi_3 = \dfrac{C_p}{D^0 \lambda^1 \mathrm{V}^0 \mu^{-1}}$

$$= \frac{C_p \mu}{\lambda} = \frac{\nu}{a} = Pr\text{数}$$

$$f(Nu, Re, Pr) = 0$$

あるいは

$$Nu = f(Re, Pr)$$



$$\frac{hD}{\lambda} = Nu\text{数より}$$

$$h = \frac{Nu\text{数} \times \lambda}{D}$$

参考

時間	t	s	S	S
温度	θ, T	K, ℃	T	T
力	F	$N=kgm/s^2$	$ML/S^2=MLS^{-2}$	F
熱量	Q	$J=Nm=kgm^2/s^2$	$ML^2/S^2=ML^2S^{-2}$	Q
仕事	W	$J=Nm=kgm^2/s^2$	$ML^2/S^2=ML^2S^{-2}$	FL=Q
エネルギ	E	$J=Nm=kgm^2/s^2$	$ML^2/S^2=ML^2S^{-2}$	FL=Q
動力，仕事率	P	$W=J/s$	$ML^2/S^3=ML^2S^{-3}$	$QS=QS^{-1}$
速度	u, v, w	m/s	$L/S=LS^{-1}$	$L/S=LS^{-1}$
加速度	α	m/s^2	$L/S^2=LS^{-2}$	$L/S^2=LS^{-2}$
重力加速度	g	m/s^2	$L/S^2=LS^{-2}$	$L/S^2=LS^{-2}$
質量流量	G	kg/s	$M/S=MS^{-1}$	$M/S=MS^{-1}$
体積流量	Q	m^3/s	$L^3/S=L^3S^{-1}$	$L^3/S=L^3S^{-1}$
圧力	p	$Pa=N/m^2=kg/(ms^2)$	$M/(LS^2)=ML^{-1}S^{-2}$	$F/L^2=FL^{-2}$
応力	σ	$Pa=N/m^2=kg/(ms^2)$	$M/(LS^2)=ML^{-1}S^{-2}$	$F/L^2=FL^{-2}$
体積弾性率 =1/圧縮率	K	N/m^2	$M/(LS^2)=ML^{-1}S^{-2}$	$F/L^2=FL^{-2}$
比重量	γ	$N/m^3=kg/(m^2s^2)$	$M/(L^2S^2)=ML^{-2}S^{-2}$	$F/L^3=FL^{-3}$
密度	$\rho(=\gamma/g)$	kg/m^3	$M/L^3=ML^{-3}$	$FS^2/L^4=FS^2L^{-4}$
粘性係数	μ	$Pa\cdot s=Ns/m^2$	$M/(LS)=ML^{-1}S^{-1}$	$FS/L^2=FSL^{-2}$
動粘性係数	$\nu(=\mu/\rho)$	m^2/s	$L^2/S=L^2S^{-1}$	$L^2/S=L^2S^{-1}$
比エンタルピ	h	$J/kg=Nm/kg=m^2/s^2$	$L^2/S^2=L^2S^{-2}$	$Q/M=QM^{-1}$
比内部エネルギ	u	$J/kg=Nm/kg=m^2/s^2$	$L^2/S^2=L^2S^{-2}$	$Q/M=QM^{-1}$
比熱	c, c_p	$J/(kgK)$	$L^2/(S^2T)=L^2S^{-2}T^{-1}$	$Q/(MT)=QM^{-1}T^{-1}$
熱伝導率	λ	$W/(mK)$	$ML/(S^3T)=MLS^{-3}T^{-1}$	$Q/(LST)=QL^{-1}S^{-1}T^{-1}$
熱拡散率	$a\left(=\frac{\lambda}{c_p\rho}\right)$	m^2/s	$L^2/S=L^2S^{-1}$	$L^2/S=L^2S^{-1}$
熱伝達率	h	$W/(m^2K)$	$M/(S^3T)=MS^{-3}T^{-1}$	$Q/(L^2ST)=QL^{-2}S^{-1}T^{-1}$

出典：https://www.sit.ac.jp/user/konishi/JPN/L_Support/SupportPDF/DimensionalAnalysis.pdf

超音速旅客機

周りの空気の密度分布が無視できない。
密度ρが場所によって異なる圧縮性流体として取り扱う

$$\frac{\text{慣性力}}{\text{弾性力}}=\frac{\text{質量}\times\text{加速度}}{\text{弾性率}\times\text{面積}}=\frac{\rho U^2L^2}{K\times L^2}=\frac{\rho U^2L^2}{\rho c^2L^2}=\frac{U^2}{c^2}=M^2$$

ρ: 密度
U: 代表速度
L: 代表長さ
K: 体積弾性率
c: 音速
M: マッハ数

重力が重要な流れ

$$\frac{\text{慣性力}}{\text{重力による力}}=\frac{\text{質量}\times\text{加速度}}{\text{質量}\times\text{重力加速度}}=\frac{\rho U^2L^2}{\rho L^3g}=\frac{U^2}{gL}=Fr^2$$

g: 重力加速度
Fr: フルード数

表面張力が効く流れ

$$\frac{\text{慣性力}}{\text{表面張力}}=\frac{\text{質量}\times\text{加速度}}{\text{単位長当たりの表面張力}\times\text{長さ}}=\frac{\rho U^2L^2}{\sigma L}=\frac{\rho U^2L}{\sigma}=\mathrm{We}$$

σ: 表面張力
We: ウェーバー数