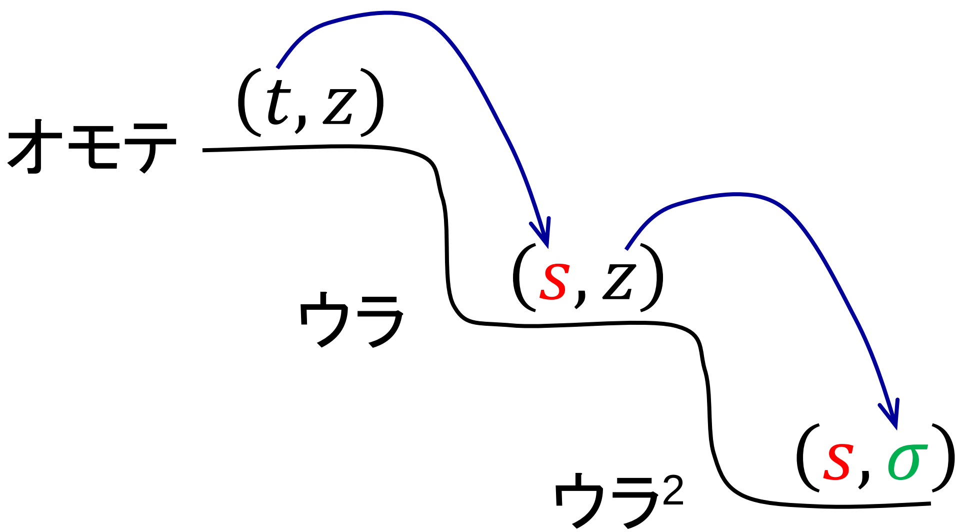
ラプラス変換

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$$

$f(t) \supset F(s)$と簡略に書く

変数が2つの場合は、$f(t,z) \supset U(s,z) \supset V(s,\sigma)$



$$U(s,z) = \int_0^\infty f(t,z)e^{-st}\,\partial t$$

$$V(s,\sigma) = \int_0^\infty U(s,z)e^{-\sigma t}\,\partial z$$

$V(s,\sigma) \subset U(s,z) \subset f(t,z)$をラプラス逆変換という

ラプラス変換→
←逆ラプラス変換

オモテ	ウラ
$f(t)$	$F(s)$
α	$\int_0^{\infty} \alpha\, e^{-st}\, dt = \frac{\alpha}{s}$
$\cosh \alpha t$ $\frac{e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}}{2}$	$\int_0^{\infty} \cosh \alpha t\, e^{-st}\, dt = \frac{s}{s^2 - \alpha^{\ 2}}$
$\sinh \alpha t$ $\frac{e^{\alpha t} - e^{-\alpha t}}{2}$	$\int_0^{\infty} \sinh \alpha t\, e^{-st}\, dt = \frac{\alpha}{s^2 - \alpha^{\ 2}}$
$\frac{\partial f(t)}{\partial t}$	$\int_0^{\infty} \frac{\partial f(t)}{\partial t} e^{-st}\, dt = sF(s) - f(0)$
$\frac{\partial^2 f(t)}{\partial t^2}$	$\int_0^{\infty} \frac{\partial^2 f(t)}{\partial t^2} e^{-st}\, dt = s^3 F(s) - s^2 f(0) - sf'(0) - f'' f(0)$
$1-erf\left(\frac{\alpha}{\sqrt{4t}}\right)$	$\frac{1}{s} exp(-\alpha \sqrt{s})$

$\theta(\tau,\xi)$の偏微分方程式

$$\frac{\partial\theta(\tau,\xi)}{\partial\tau}=\frac{\partial^2\theta(\tau,\xi)}{\partial\xi^2}$$

初期条件

$\tau=0 \quad \theta(0,\xi)=0$

境界条件その1

$\xi=0 \quad \theta(\tau,0)=1$

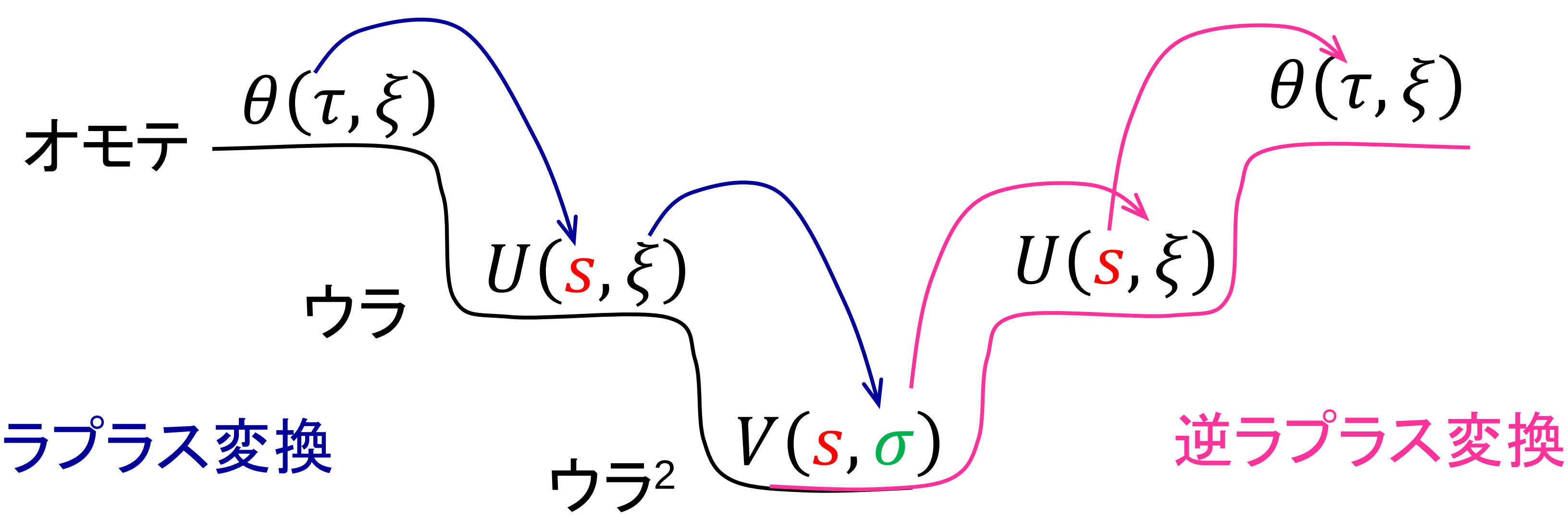
境界条件その2

$\xi=1 \quad \frac{\partial\theta}{\partial\xi}=0$ あるいは

$\xi=\infty \quad \theta(\tau,\infty)=0$ ←無限深さ

$\theta(\tau,\xi)\supset U(s,\xi)\supset V(s,\sigma)$

$V(s,\sigma)\subset\theta(\tau,\xi)\subset U(s,\xi)$



オモテ →	ウラ →	ウラ ^{2}
$\theta(\tau,\xi)$	$U(s,\xi)$	$V(s,\sigma)$
$\dfrac{\partial\theta(\tau,\xi)}{\partial\tau}$	$sU(s,\xi)-\theta(0,\xi)$	
	$\dfrac{\partial^2\theta(\tau,\xi)}{\partial\xi^2}$	$\sigma^2V(s,\sigma)-\sigma U(s,0)-\dfrac{\partial U(s,0)}{\partial\xi}$

オモテ $\dfrac{\partial\theta(\tau,\xi)}{\partial\tau}=\dfrac{\partial^2\theta(\tau,\xi)}{\partial\xi^2}$

ウラ

左辺 $=\dfrac{\partial\theta(\tau,\xi)}{\partial\tau}\supset sU(s,\xi)-\theta(0,\xi)$

$=sU(s,\xi)-0$

初期条件
$\tau=0$
$\theta(0,\xi)=0$

右辺 $=\dfrac{\partial^2\theta(\tau,\xi)}{\partial\xi^2}\supset\dfrac{\partial^2U(s,\xi)}{\partial\xi^2}$

$sU(s,\xi)=\dfrac{\partial^2U(s,\xi)}{\partial\xi^2}$

ウラ ^{2}

左辺 $=sU(s,\xi)\supset sV(s,\sigma)$

右辺 $=\dfrac{\partial^2U(s,\xi)}{\partial\xi^2}$

$\supset\sigma^2V(s,\sigma)-\sigma U(s,0)-\dfrac{\partial U(s,0)}{\partial\xi}$

$=\sigma^2V(s,\sigma)-\sigma U(s,0)-g(s)$

$=\sigma^2V(s,\sigma)-\dfrac{\sigma}{s}-g(s)$

境界条件その1
$\xi=0$
$U(s,0)=\dfrac{1}{s}$

$sV(s,\sigma)=\sigma^2V(s,\sigma)-\dfrac{\sigma}{s}-g(s)$

オモテ

初期条件

$\tau = 0 \quad \theta(0,\xi) = 0$

境界条件その1

$\xi = 0 \quad \theta(\tau,0) = 1$

境界条件その2

$\xi = \infty \quad \theta(\tau,\infty) = 0$

ウラ

境界条件その1

$\xi = 0 \quad U(s,0) = \frac{1}{s}$

境界条件その2

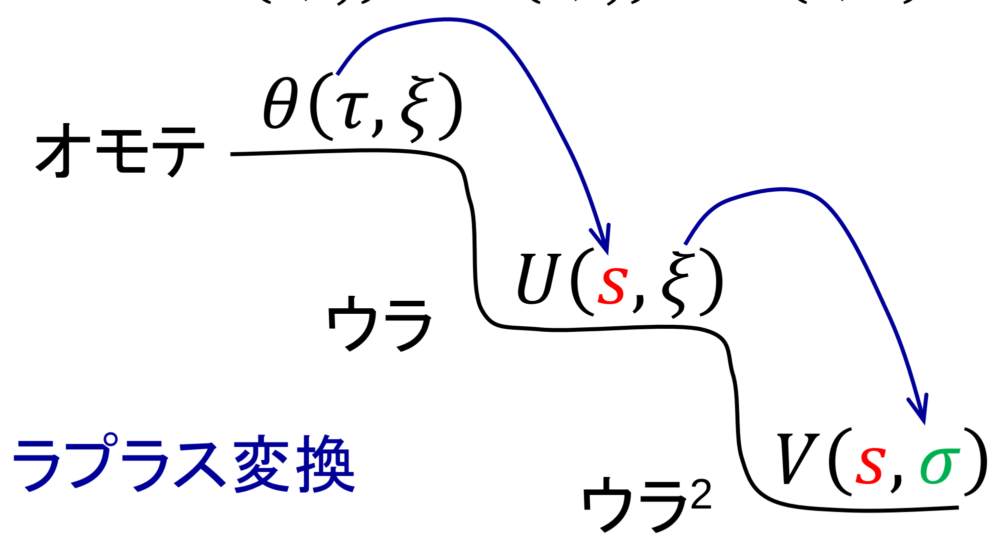
$\xi = \infty \quad U(s,\infty) = 0$

$sV(s,\sigma) = \sigma^2 V(s,\sigma) - \frac{\sigma}{s} - g(s)$ を整理して

$(\sigma^2 - s)V(s,\sigma) = \frac{\sigma}{s} + g(s)$

$V(s,\sigma) = \frac{1}{s}\frac{\sigma}{\sigma^2 - s} + \frac{g(s)}{\sigma^2 - s}$

$\theta(\tau,\xi) \supset U(s,\xi) \supset V(s,\sigma)$



ウラ ^{2} →	ウラ
$V(s,\sigma)$	$U(s,\xi)$
$\dfrac{\sigma}{\sigma^2-(\sqrt{s})^2}$	$\cosh\sqrt{s}\,\xi$
$\dfrac{\sqrt{s}}{\sigma^2-(\sqrt{s})^2}$	$\sinh\sqrt{s}\,\xi$

$$V(s,\sigma)=\frac{1}{s}\frac{\sigma}{\sigma^2-s}+\frac{g(s)}{\sigma^2-s}$$

$$=\frac{1}{s}\left(\frac{\sigma}{\sigma^2-\sqrt{s}^2}\right)+\frac{g(s)}{\sqrt{s}}\left(\frac{\sqrt{s}}{\sigma^2-\sqrt{s}^2}\right)$$

左辺 $=V(s,\sigma)\subset U(s,\xi)$

右辺 $=\frac{1}{s}\cosh\sqrt{s}\,\xi+\frac{g(s)}{\sqrt{s}}\sinh\sqrt{s}\,\xi$

$$U(s,\xi)=\frac{1}{s}\cosh\sqrt{s}\,\xi+\frac{g(s)}{\sqrt{s}}\sinh\sqrt{s}\,\xi$$

$$U(s,\xi)=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{s}\left(e^{\sqrt{s}\xi}+e^{-\sqrt{s}\xi}\right)\right\}+\frac{1}{2}\left\{\frac{g(s)}{\sqrt{s}}\left(e^{\sqrt{s}\xi}-e^{-\sqrt{s}\xi}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s}+\frac{g(s)}{\sqrt{s}}\right)e^{\sqrt{s}\xi}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s}-\frac{g(s)}{\sqrt{s}}\right)e^{-\sqrt{s}\xi}$$

境界条件その2

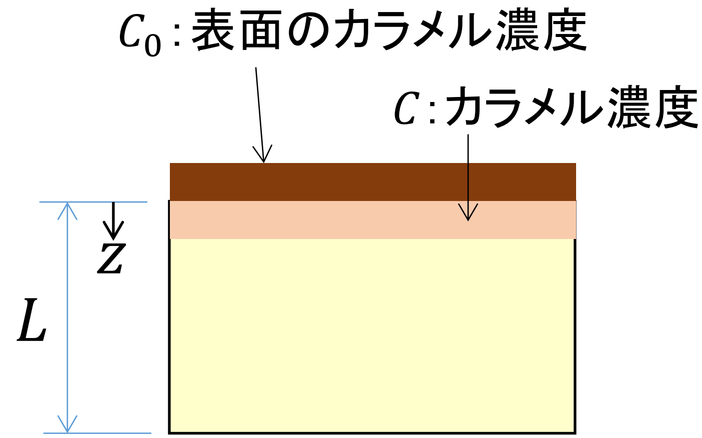
$\xi=\infty$　$U(s,\infty)=0$を満足するためには、$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s}+\frac{g(s)}{\sqrt{s}}\right)=0$

よって$g(s)=-\frac{1}{\sqrt{s}}$

$$U(s,\xi)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s}-\frac{g(s)}{\sqrt{s}}\right)e^{-\sqrt{s}\xi}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s}-\frac{-\frac{1}{\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}\right)e^{-\sqrt{s}\xi}$$

$$=\frac{1}{s}e^{-\sqrt{s}\xi}$$

ウラ	オモテ
$U(s,\xi)$	$\theta(\tau,\xi)$
$\dfrac{1}{s}e^{-\sqrt{s}\xi}$	$1-erf\left(\dfrac{\xi}{\sqrt{4\tau}}\right)$



$$U(s,\xi)=\frac{1}{s}e^{-\sqrt{s}\xi}$$

左辺 $= U(s,\xi) \subset \theta(\tau,\xi)$

右辺 $= \frac{1}{s}e^{-\sqrt{s}\xi} \subset 1-erf\left(\frac{\xi}{\sqrt{4\tau}}\right)$

$$\theta(\tau,\xi)=1-erf\left(\frac{\xi}{\sqrt{4\tau}}\right)$$

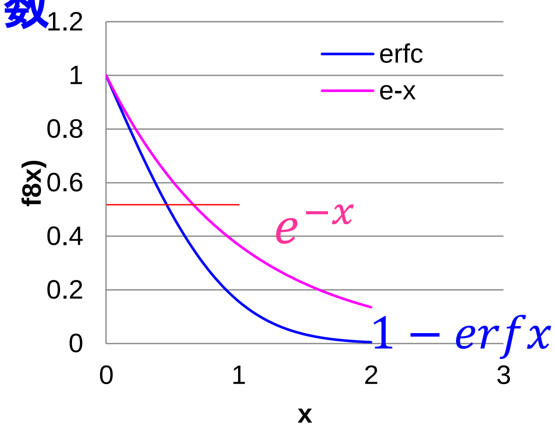
$$erf x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt$$

$$\theta=\frac{C}{C_0}$$

$$\xi=\frac{z}{L}$$

$$\tau=\frac{Dt}{L^2}$$

$1-erf x=\mathrm{erfc}\,x$ ←**相補誤差関数**



$$\frac{\xi}{\sqrt{4\tau}}=\frac{\frac{z}{L}}{\sqrt{4\frac{Dt}{L^2}}}=\frac{z}{\sqrt{4Dt}}$$

$$\theta=\frac{C}{C_0}=1-erf\left(\frac{z}{\sqrt{4Dt}}\right)$$