対角行列 $\begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

逆行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

λを固有値、$\vec{p}$を固有ベクトルとすると

$$A\vec{p} = \lambda\vec{p}$$
$$= \lambda E\vec{p}$$
$$A\vec{p} - \lambda E\vec{p} = 0$$
$$(A - \lambda E)\vec{p} = 0$$

$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\left\{\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$B = \begin{pmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix}$とおく

$B\vec{p} = \vec{0}$

Bが逆行列B^{-1}を持つとすると

$B^{-1}B\vec{p} = \vec{0}$ $E\vec{p} = \vec{0}$ $\vec{p} = \vec{0}$

Bが逆行列B^{-1}を持たない

$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$である必要

$$(4-\lambda)(3-\lambda) - 2\cdot 1 = 0$$
$$\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$$
$$(\lambda - 2)(\lambda - 5) = 0$$
$$\lambda = 2,\ 5$$

$\lambda = 2$のとき

$$\begin{pmatrix} 4-2 & 1 \\ 2 & 3-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$2x + y = 0$$
$$(x, y) = (m, -2m)$$
$$\vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = m\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$\lambda = 5$のとき

$$\begin{pmatrix} 4-5 & 1 \\ 2 & 3-5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$-x + y = 0$$
$$(x, y) = (m, m)$$
$$\vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = m\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

固有値2のとき固有ベクトルは$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

固有値5のとき固有ベクトルは$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

固有値2のとき固有ベクトルは$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$　　$A\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

固有値5のとき固有ベクトルは$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$　　$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$A\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$ ←対角化

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$とおく

$$AP = P\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

両辺にP^{-1}を掛けて

$$P^{-1}AP = P^{-1}P\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = E\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

確認
$$\left\{\begin{aligned} P^{-1} &= \frac{1}{1\cdot 1-(-2\cdot 1)}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ P^{-1}AP &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 10 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}\right.$$

固有値　　：　λ、 μ
固有ベクトル：　$\vec{p}$　$\vec{q}$

$$A\vec{p} = \lambda\vec{p} \qquad A\vec{q} = \mu\vec{q}$$

$$A(\vec{p} \quad \vec{q}) = (\lambda\vec{p} \quad \mu\vec{q}) = (\vec{p} \quad \vec{q})\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$ ←対角化

$P = (\vec{p} \quad \vec{q})$とおくと

$$AP = P\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

両辺にP^{-1}を掛けて

$$P^{-1}AP = P^{-1}P\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$