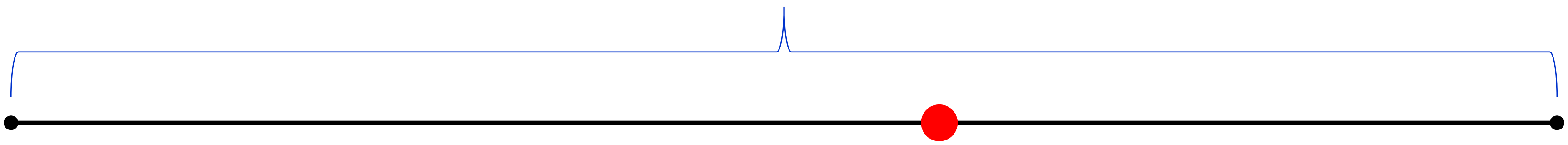
ポアソン分布

10万回に1回の事故



||

1回

微小空間での確率$p = \dfrac{1}{100{,}000}$

⇩

1,000回

単位空間(1,000回)での事故に遭う期待値

$$\lambda = np = 1{,}000 \times \frac{1}{100{,}000} = \frac{1}{100}$$

10,000回

単位空間(10,000回)での事故に遭う期待値

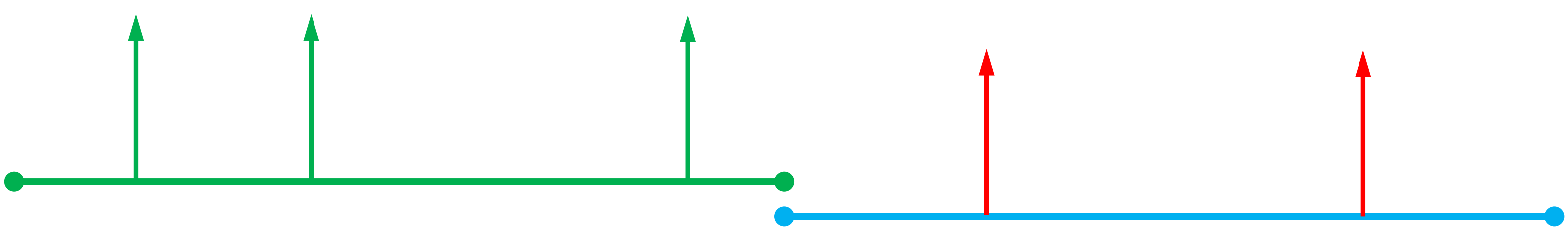
$$\lambda = np = 10{,}000 \times \frac{1}{100{,}000} = \frac{1}{10}$$

ポアソン分布

単位時間当たり平均λ回起きるランダムなイベントが
単位時間にk回発生する確率$P(k)$

$$P(k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \qquad P(2) = e^{-3}\frac{3^2}{2!} \fallingdotseq 0.22$$

$\lambda = 3$ $\qquad$ $k = 2$



現在までの実績
3回／年

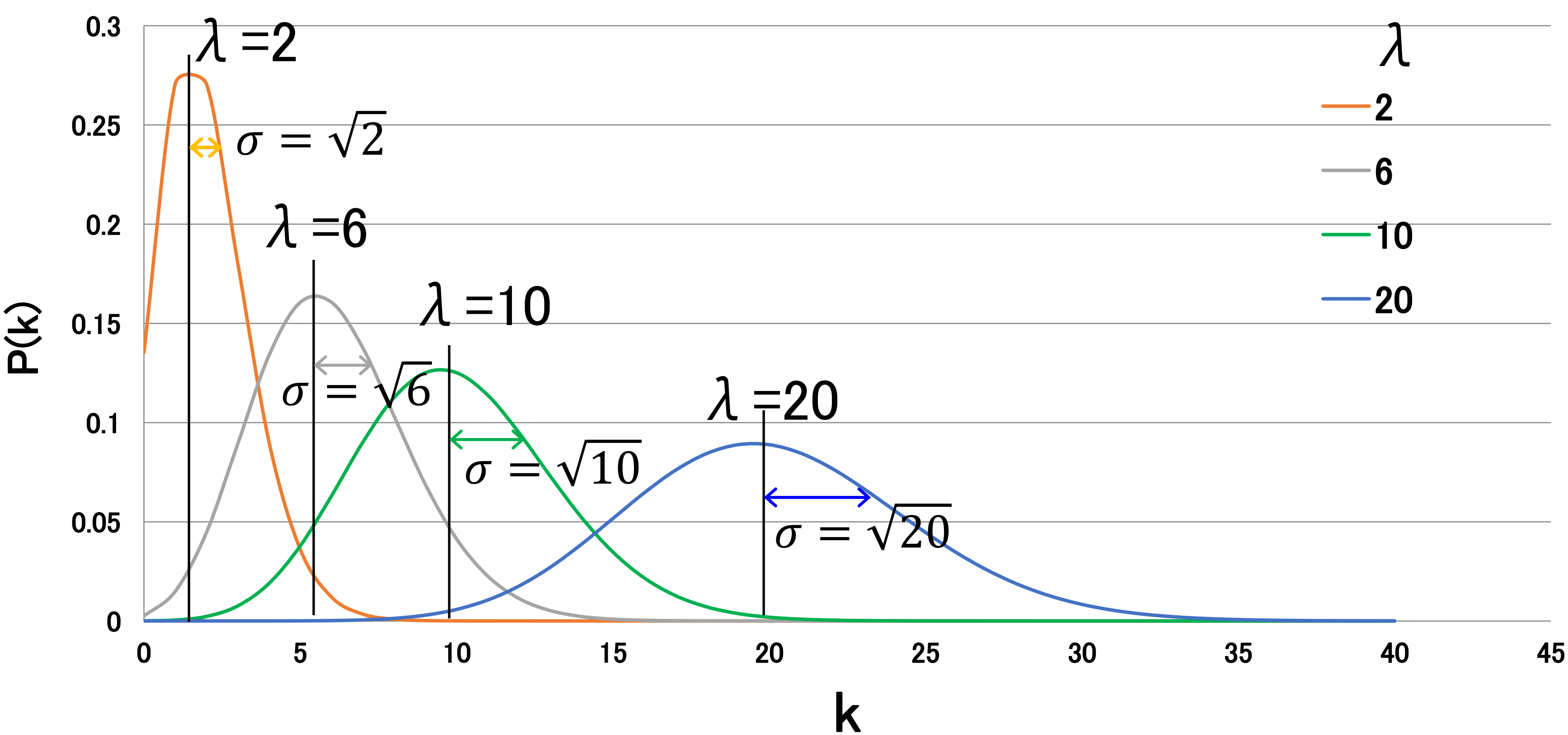
今後2回／年

期待値$= \lambda = np$

分散$V = \lambda$

$$\sigma = \sqrt{V} = \sqrt{\lambda}$$

n	1000	3000	5000	10000
p	0.002	0.002	0.002	0.002
λ	2	6	10	20



事例1

不良品が発生する確率$p = \frac{1}{200}$
抜取検査数$n = 10$の場合
不良品1個発生する確率は？

$$期待値\ \lambda = np = 10 \times \frac{1}{200} = 0.05 \leq 5$$

$$P(X = 1) = \frac{e^{-\lambda}\ \lambda^{k}}{k!} = \frac{e^{-0.05} \times 0.05^{1}}{1!} = 0.048$$

事例2

りんごを250個ずつ箱に詰める。 平均して0.8%腐る。箱を開けた時に、腐ったりんご3個以上発生する確率は？

期待値 $\lambda = np = 250 \times 0.008 = 2 \leq 5$

$$P(X = r) = \frac{e^{-\lambda}\ \lambda^{k}}{k!} = \frac{e^{-2} \times 2^{r}}{r!} = 0.048$$

$$\begin{aligned} P(X \geq 3) &= 1 - P(0) - P(1) - P(2) \\ &= 1 - e^{-2} - 2e^{-2} - 2e^{-2} \\ &= 1 - 5e^{-2} = 0.32 \end{aligned}$$

事例3

バクテリアが平均3個／mLのポアソン分布に従う場合

a)1mLのサンプル液中に5個以上のバクテリアがいる確率

b)1mL2個のサンプルのどちらにもバクテリアがいない確率

c) 1mL3個のサンプルの内、2個に少なくとも1個ずついる確率

期待値 $\lambda = 3$

$$P(X = r) = \frac{e^{-3}3^r}{r!}$$

a) $P(X \geq 5) = 1 - P(0) - P(1) - P(2) - P(3) - P(4)$

$$= 1 - e^{-3} - 3e^{-3} - \frac{9}{2}e^{-3} - \frac{9}{2}e^{-3} - \frac{27}{8}e^{-3}$$

$$= 1 - \frac{131}{8}e^{-2} \fallingdotseq 0.185$$

b) $[P(0)]^2 = e^{-6} \fallingdotseq 0.002$

c) $P(X \geq 1) = 1 - P(0) = 1 - e^{-3} \fallingdotseq 0.95$

３個のうち２個なので、${}_3\mathrm{C}_2(0.95)^2(0.05) \fallingdotseq 0.135$

事例4

大都市では平均80人に1人がα型血液保持者

a)無作為200人中にα型血液者が4人含まれる確率

b)α型血液保持者が少なくとも1名含まれる確率を0.9以上にするために何人選ぶか？

期待値 $\lambda = np = 200 \times \frac{1}{80} = 2.5 \leq 5$

$$P(X=r) = \frac{e^{-2.5}2.5^{r}}{r!}$$

$a)P(X \geq 4) = 1 - P(0) - P(1) - P(2) - P(3)$

$$= 1 - e^{-2.5} - 2.5e^{-2.5} - \frac{(2.5)^2}{2!}e^{-2.5} - \frac{(2.5)^3}{3!}e^{-2.5} \fallingdotseq 0.24$$

b) $P(X \geq 1) \geq 0.9$ $\quad 1 - P(X=0) \geq 0.9$ $\quad \left(\frac{79}{80}\right)^n \leq 0.1$

$n \geq \frac{log0.1}{log0.9875} \fallingdotseq 183.1$ $\quad$ よって184人以上

事例5

結婚前半の15年間と後半の10年間で夫から請求される香典の回数の変化に気づいた主婦がいます。以下の何れか？

①後半の方が香典の回数が増えた
②香典の度数分布の特徴が変化した
③最頻値（モード）が1回（または2回）から5回に変化した

結婚前半の15年間

香典回数	度数（年数）
0	1
1	4
2	4
3	3
4	2
5	1
6	0
7	0
8	0
9	0
10	0

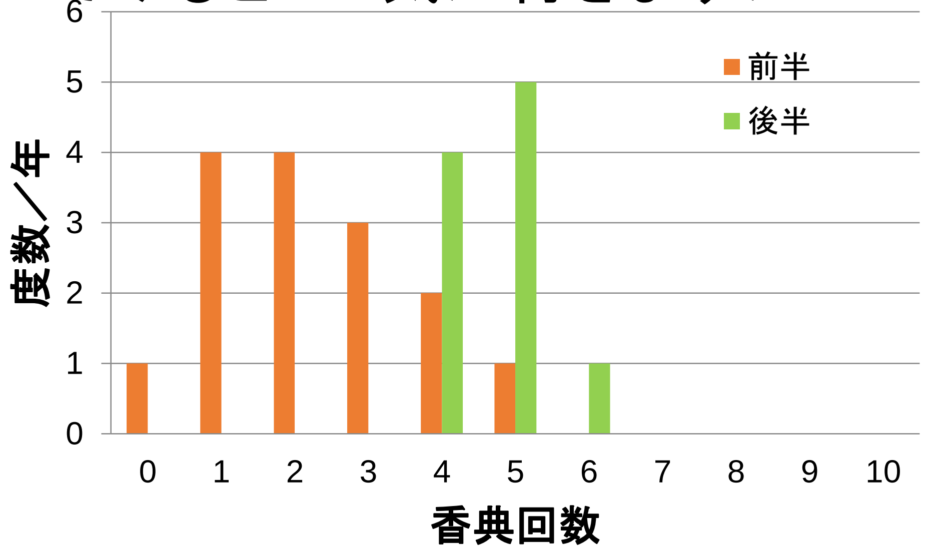
年平均
2.26

結婚後半の10年間

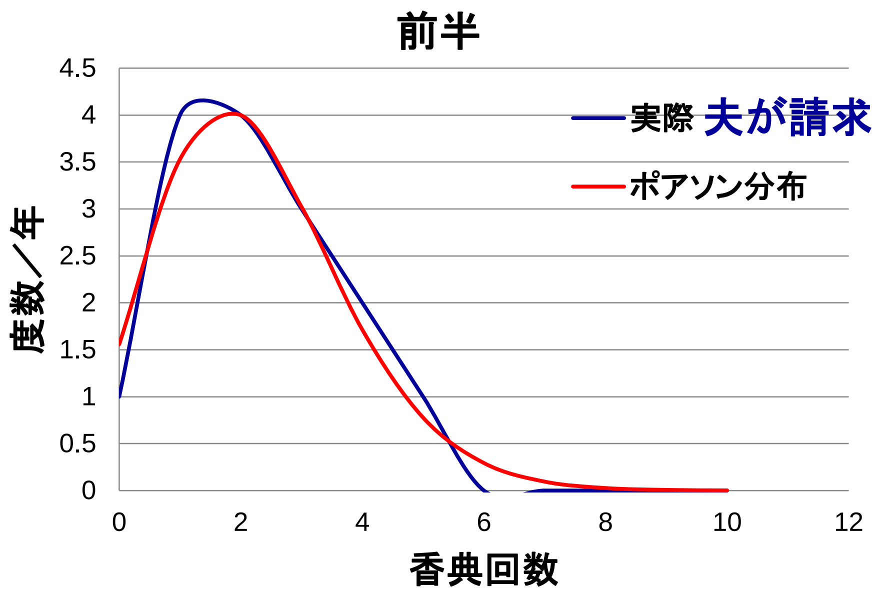
香典回数	度数（年数）
0	0
1	0
2	0
3	0
4	4
5	5
6	1
7	0
8	0
9	0
10	0

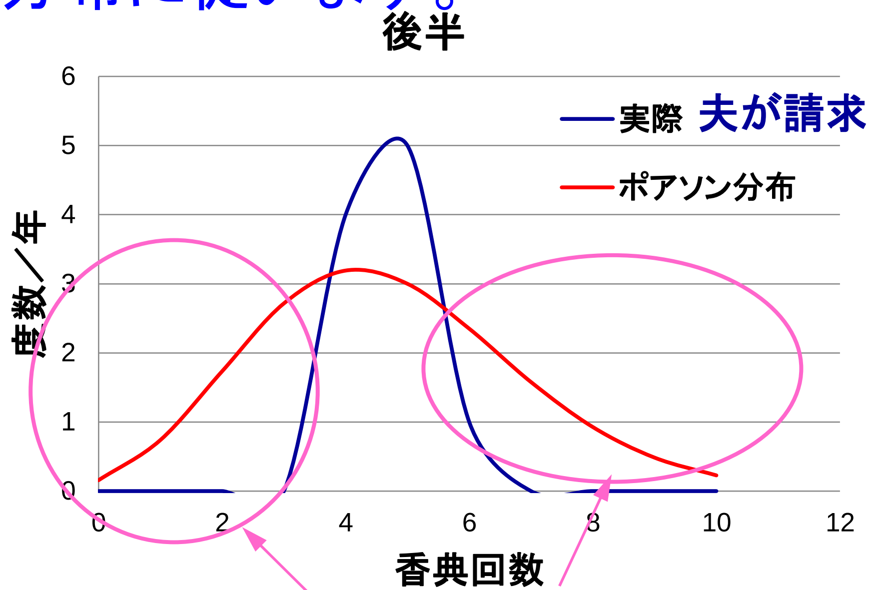
年平均
4.7

度数分布表を描いてみると‥　気が付きますか？



稀にしか起こらないものは、ポアソン分布に従います。





この辺の度数が少ない
本来、このような分布が自然