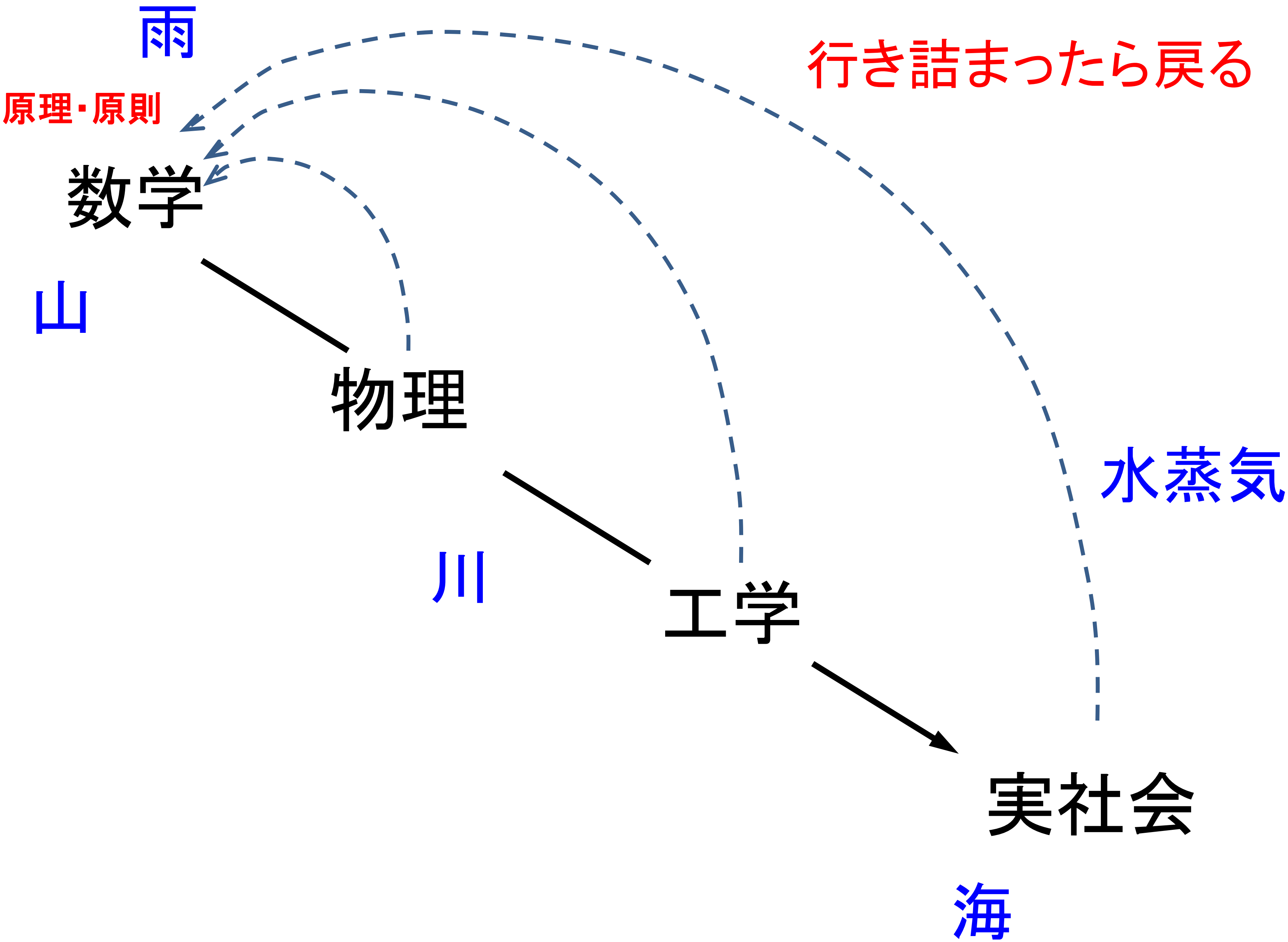
原理・原則

とんでもなく面白い 仕事に役立つ数学

（著者：　西成活裕　発行：角川ｿﾌｨｱ文庫）

キーワード：　「アタリ」をつける



雨
原理・原則
数学
山
物理
川
工学
実社会
海
水蒸気
行き詰まったら戻る

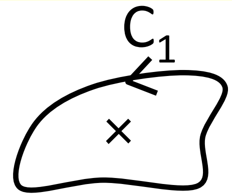
穴ぼこが開いていたら、その穴ぼこをとおして見ると全体を見渡せる

$$f(\alpha)=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f(z)}{z-\alpha}dz$$

コーシーの積分公式

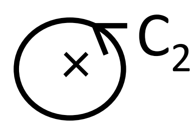
$$\int_c f(z)dz=\int_c\frac{1}{z-\alpha}dz=2\pi i$$

← 特異点αに情報がある



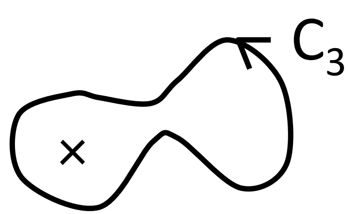
$$\int_{C_1} f(z)dz$$

||



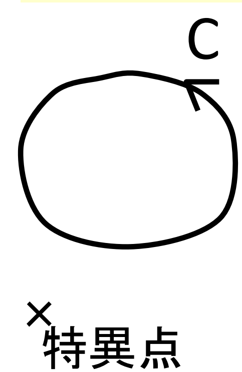
$$\int_{C_2} f(z)dz$$

||

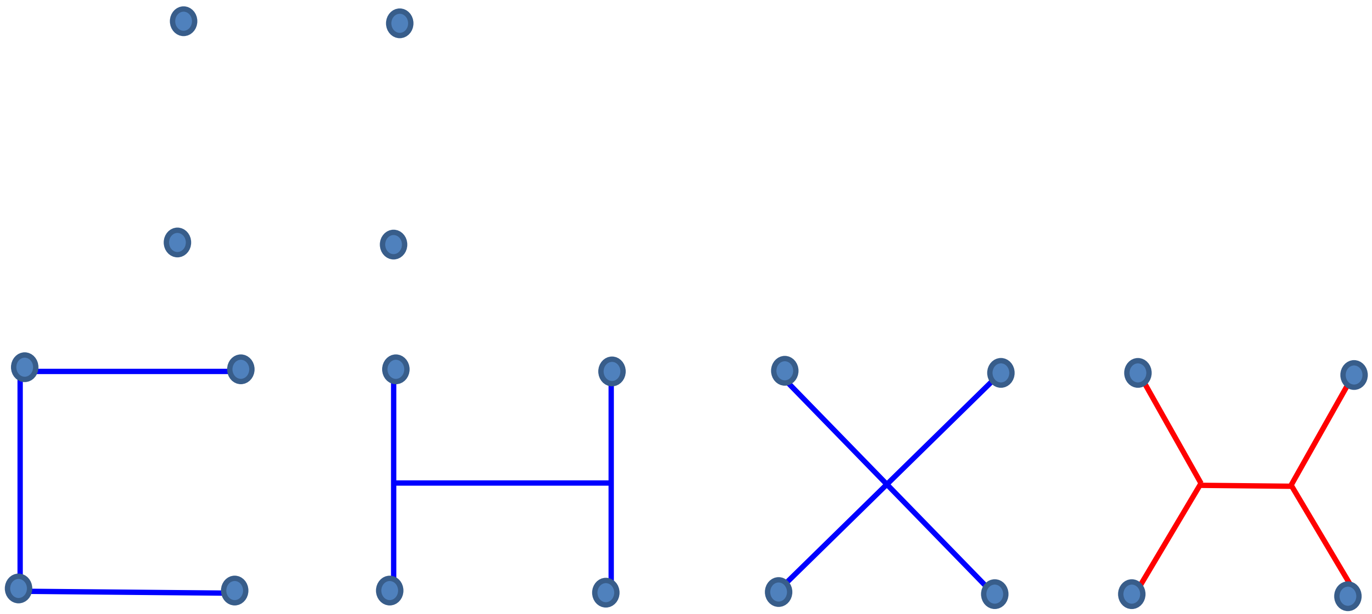


$$\int_{C_3} f(z)dz$$

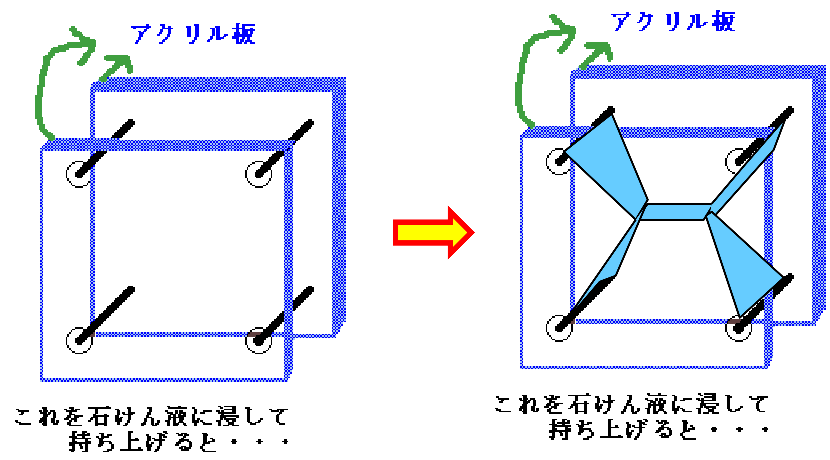
$$\int_C f(z)dz=0$$



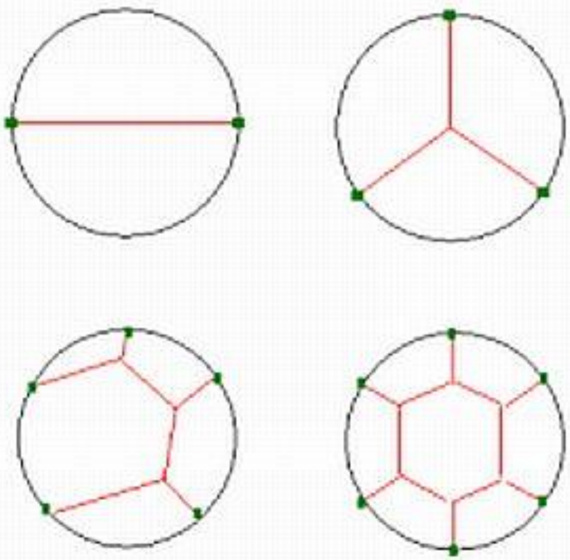
下記の４点を結ぶ最短ルートは？



A　　B　　C　　D

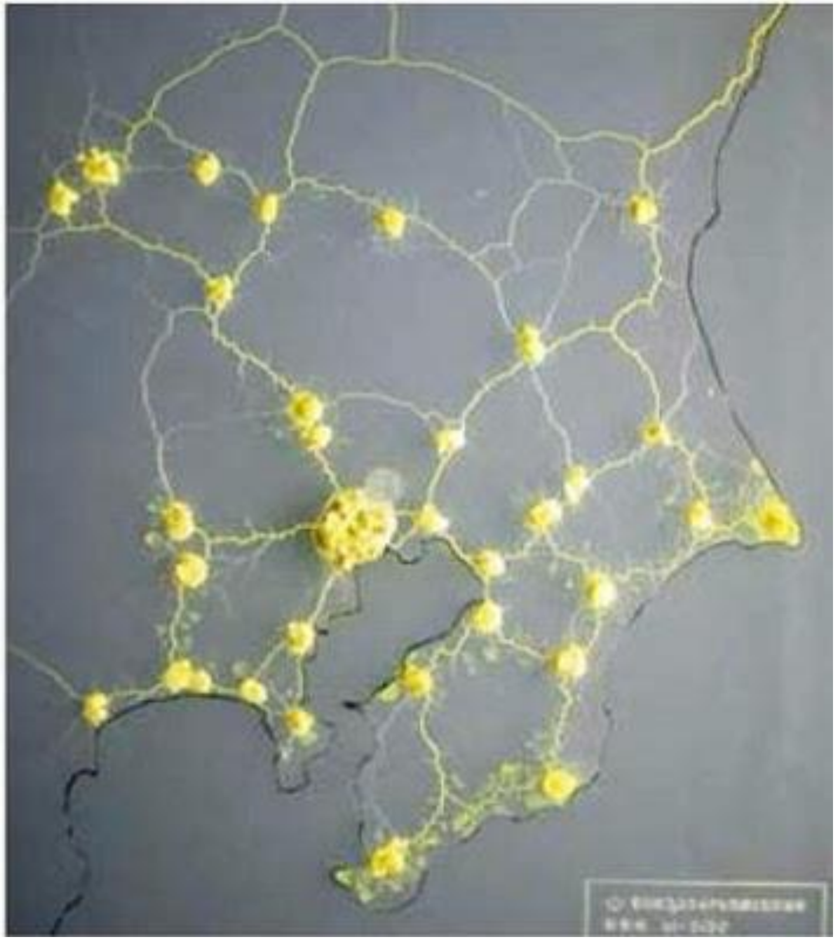


最短距離は以下の通り

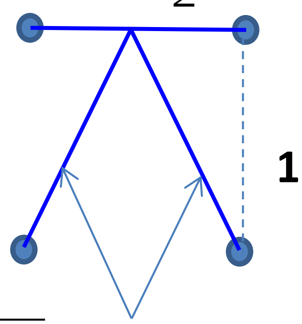


フェルマー点

粘菌が作った模様で、面白いことにほぼ関東の鉄道網と一致する

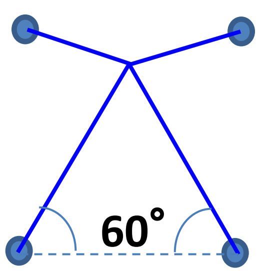


$$1+\sqrt{5}=\mathbf{3.236}$$



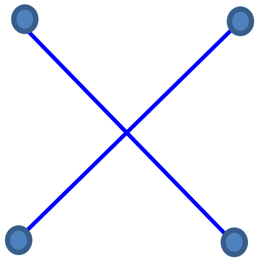
$$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

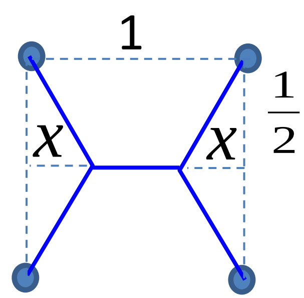
4.130



$x=\frac{1}{2}$のとき

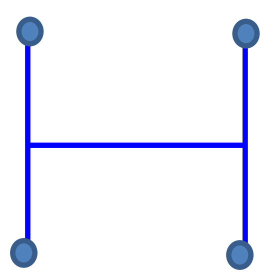
$$2\sqrt{2}=\mathbf{2.828}$$





？

$x=0$のとき **3**



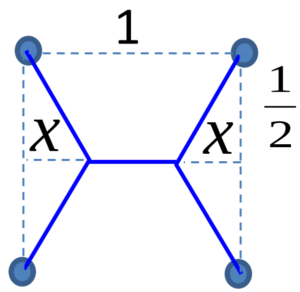
XとHの間に最短がありそう

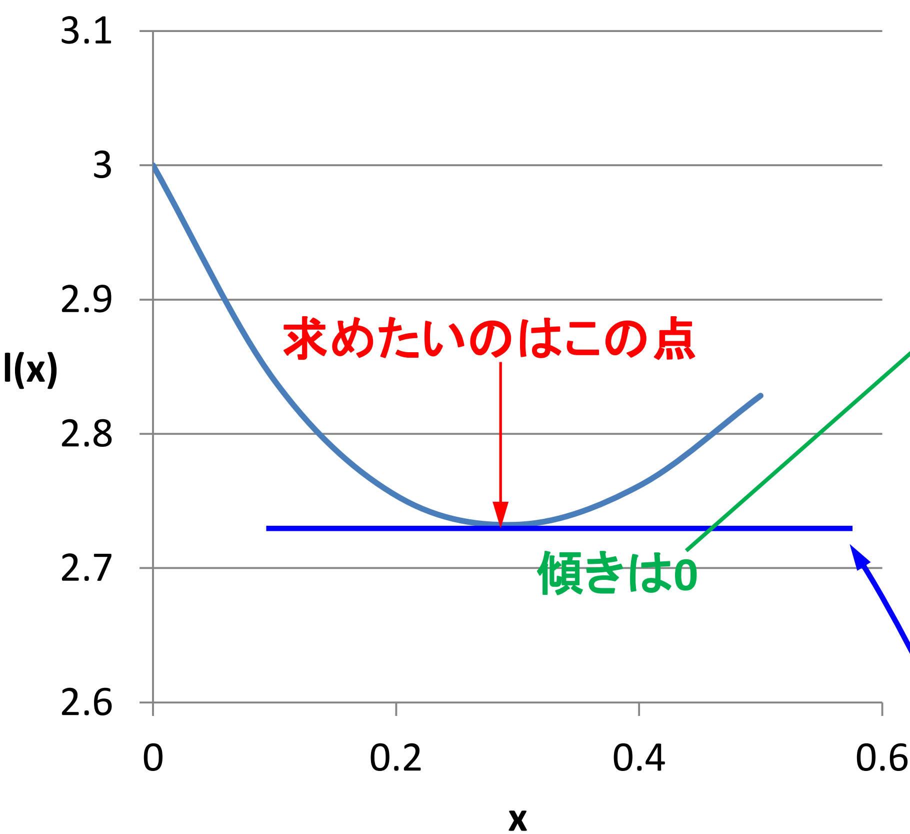
⇩

アタリをつけて式をつくる

$$l(x)=4\times\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}+1-2x$$

4点を結ぶ線長をℓ(x)とする





$$l(x) = 4\times\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}+1-2x$$

$\boxed{\text{微分}}$すると

$$\frac{d}{dx}l(x) = 4\times\frac{1}{2}\left(x^2+\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}\times 2x-2$$

$$=\frac{4x}{\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}}-2$$

$$0=\frac{4x}{\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}}-2$$ とすると

$$1=\frac{2x}{\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}} \qquad 2x=\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}$$

$$4x^2=x^2+\frac{1}{4} \qquad 3x^2=\frac{1}{4} \qquad x^2=\frac{1}{12}$$

$$x=\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$l\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)=2.732$$

未来を予測する
微分方程式

「アタリ」をつける

$$\frac{\text{次の状態}(t+dt)-\text{今の状態}(t)}{dt}=\text{変化}$$

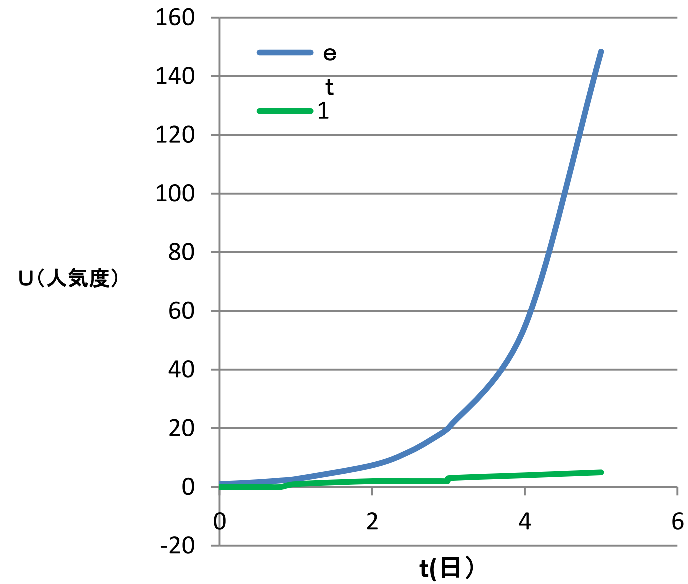
①「C君の人気度が毎日+1変化する」を式にする

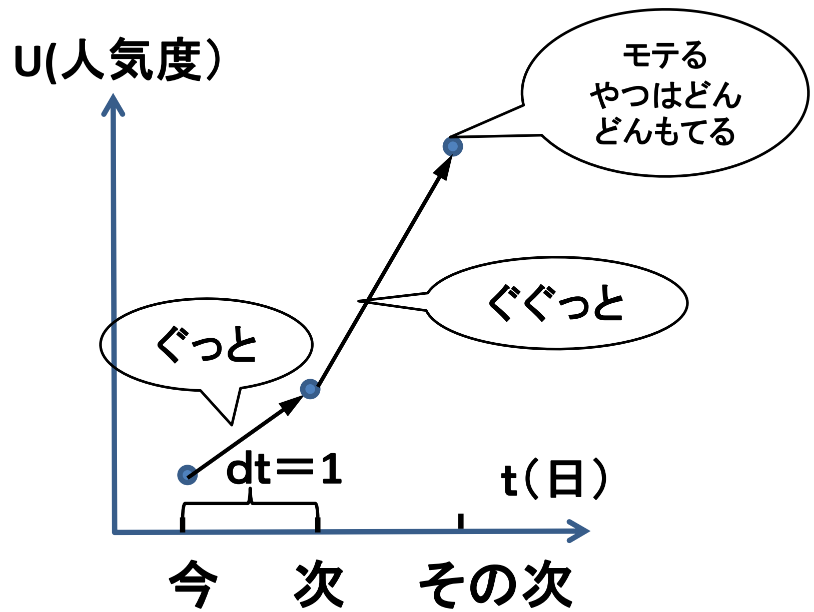
$$U(t+1)-U(t)=1$$

U(0)=0とすると、10日後にはファンは10人

②「変化が自分自身に比例する」を式にする

$$U(t+1)-U(t)=U(t)$$





$$\frac{U(t+dt)-U(t)}{dt}=U(t)$$

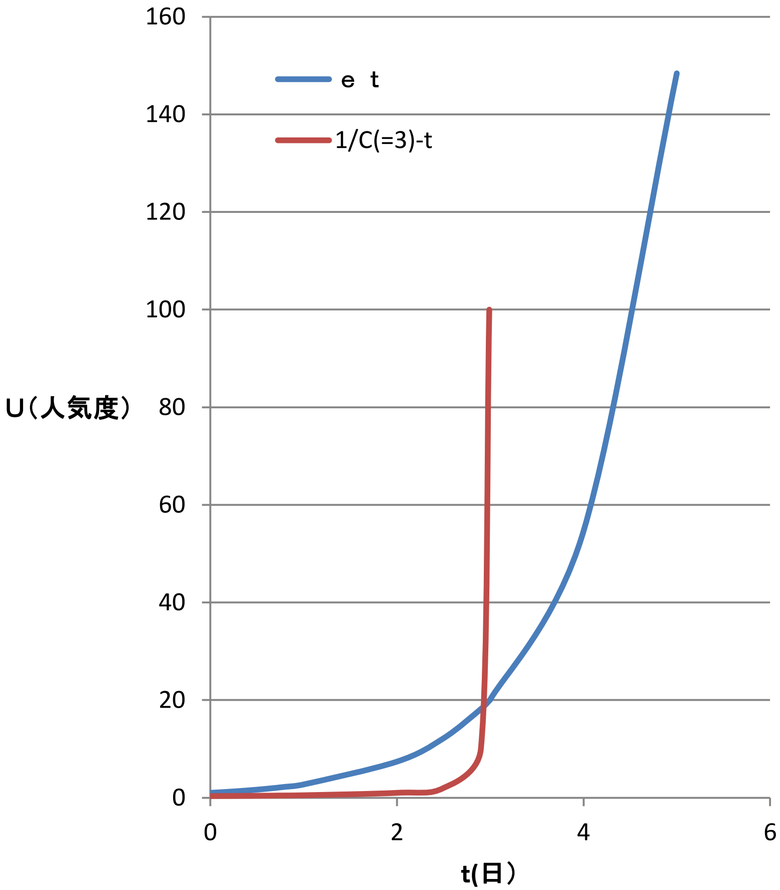
$$dt\to 0$$

$$\frac{dU}{dt}=U(t) \qquad \text{解は} \qquad U(t)=e^t$$

微分しても元と同じである関数

では、次式のイメージは？

$$U(t+1)-U(t)=U^2(t)$$



$$\frac{dU}{dt}=U^2(t) \qquad \frac{dU}{U^2(t)}=dt$$

両辺積分すると

$$\int \frac{dU}{U^2(t)}=\int dt$$

$$左辺=-U^{-1} \qquad 右辺=t-C$$

$$=-\frac{1}{U}$$

$$-\frac{1}{U}=t-C \qquad U(t)=\frac{1}{C-t}$$

← C=3のときのグラフは？

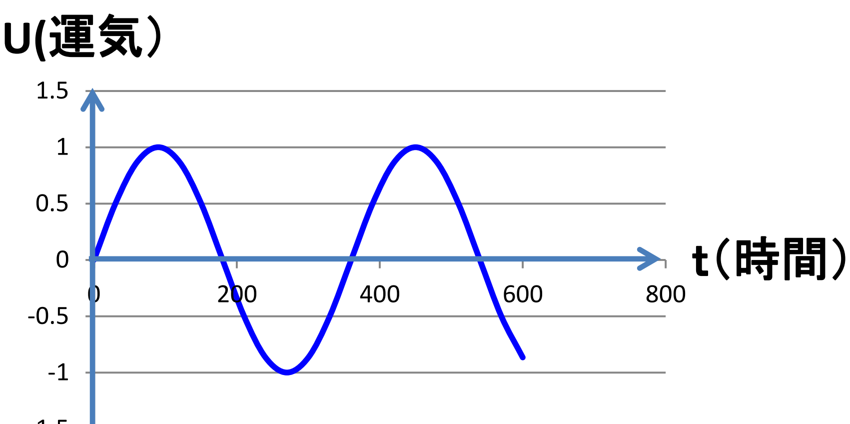
イメージが大事！！

あなたの人生（運気＝U）を予測する式は？

$$\frac{dU}{dt} = \text{人生に影響を及ぼす現象（因子）}$$

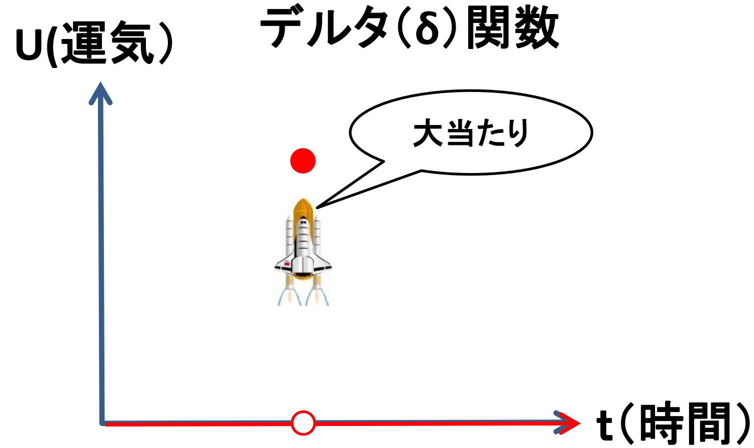
プラス因子は足し算、マイナス因子は引き算

$$\frac{dU}{dt} = \underbrace{k \cdot U}_{\text{運気を後押し}} - \underbrace{a \cdot U^2}_{\text{足を引っ張られる}} + \underbrace{\sin t}_{\text{景気変動}} + \underbrace{\delta(t-3)}_{\text{宝くじ}}$$



sintは、ゆらゆら揺れるあなたの恋心

宝くじの関数
デルタ（δ）関数



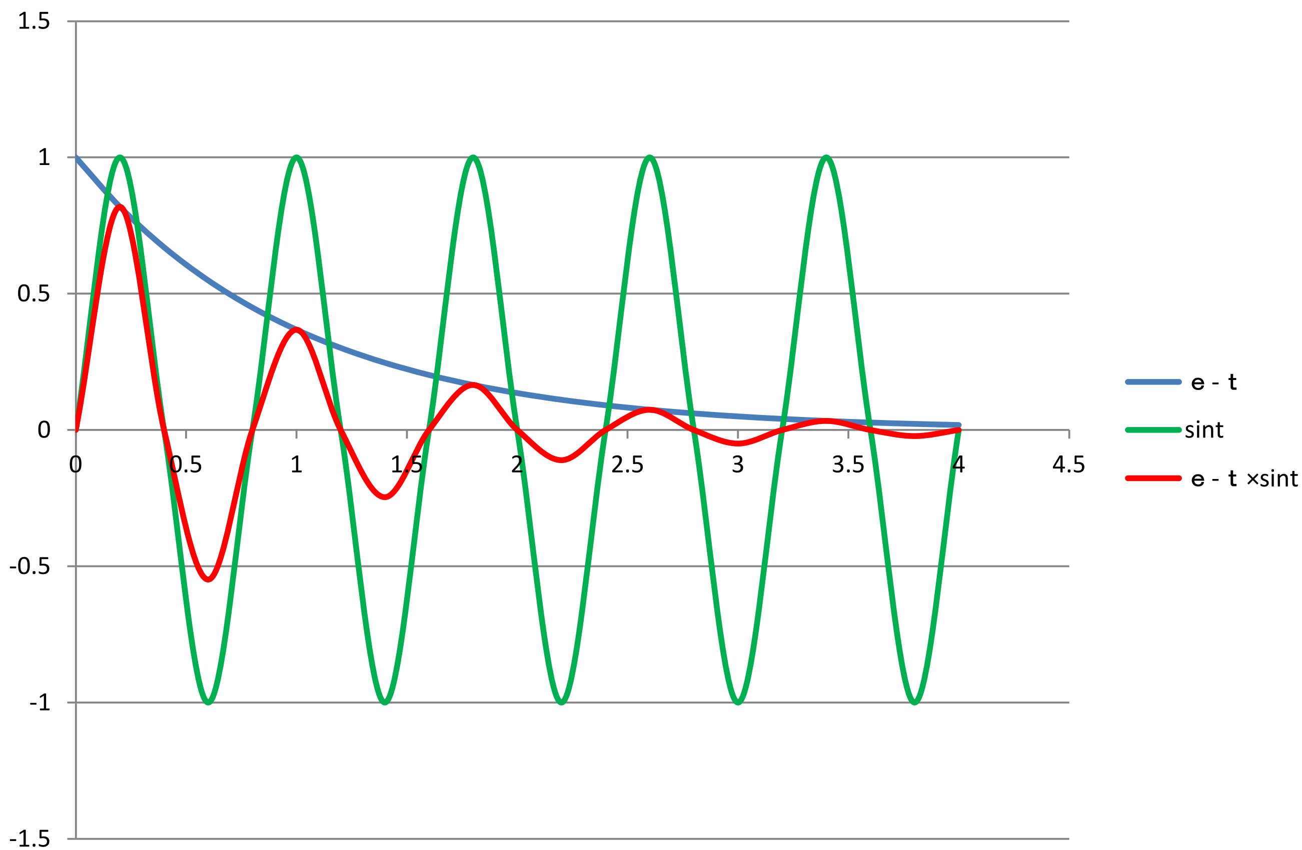
t＝3で発散

はかなく消えゆく恋心を数式で表すと？

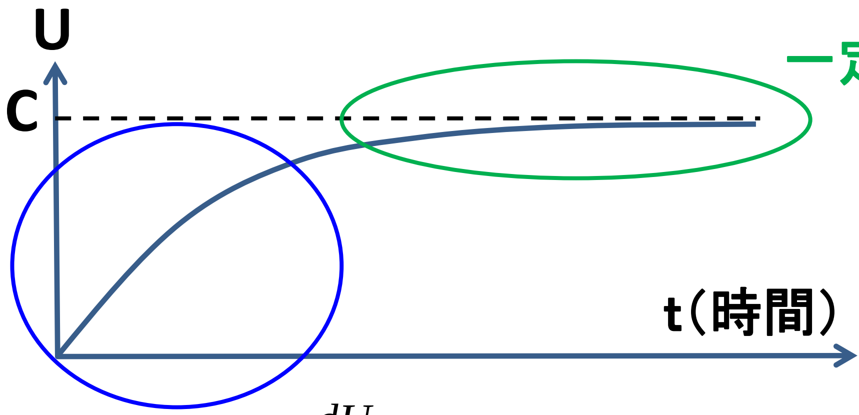
$$e^{-t} \times \sin t$$

掛け算： 因子同士が関連
足し算： 因子同士が独立

sintは、ゆらゆら揺れるあなたの恋心



サチる（飽和する）現象を微分方程式で表す



一定値（傾きゼロ）となる

イケイケ $\frac{dU}{dt} = U(t)$

ヒント

C-U　という式がある

$$\frac{dU}{dt} = aU(C - U)$$

ロジスティック方程式

$$\frac{dU}{dt} = aCU - \underline{aU^2}$$

Uが小さいとじゃましない
Uが大きいと効いてくる

U=Cのとき

$$\frac{dU}{dt} = aC^2 - aC^2 = 0$$

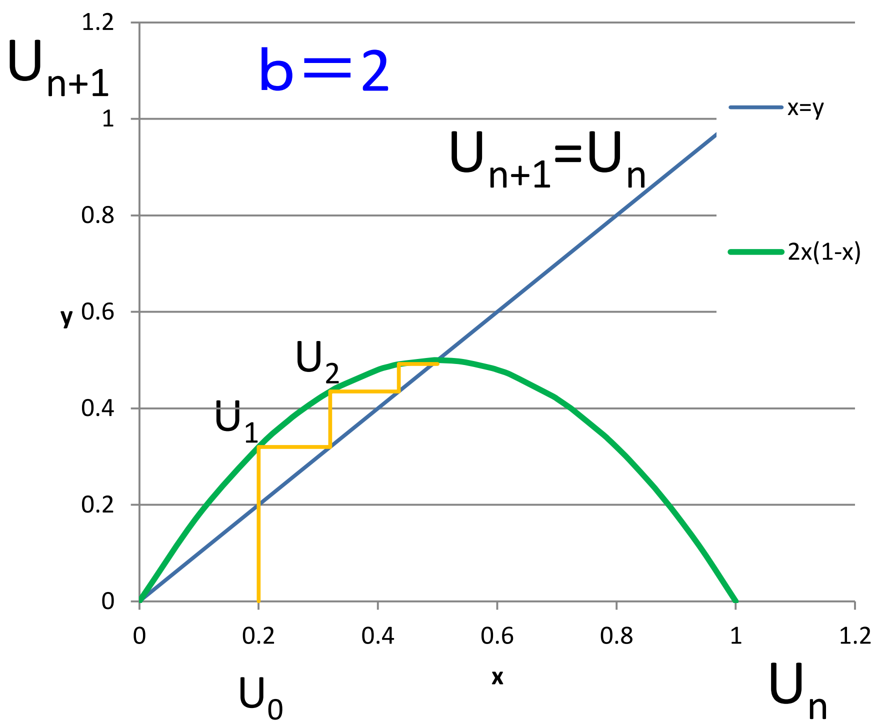
傾きがゼロ

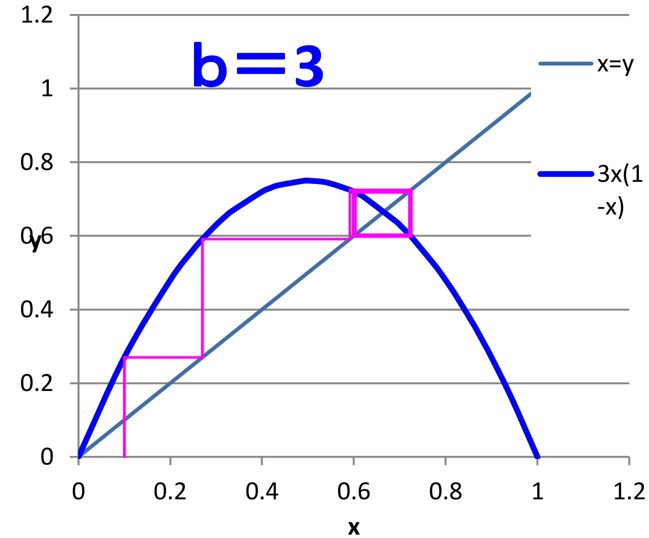
$$\frac{U(t+\Delta t)-U(t)}{\Delta t}=aU(C-U)$$

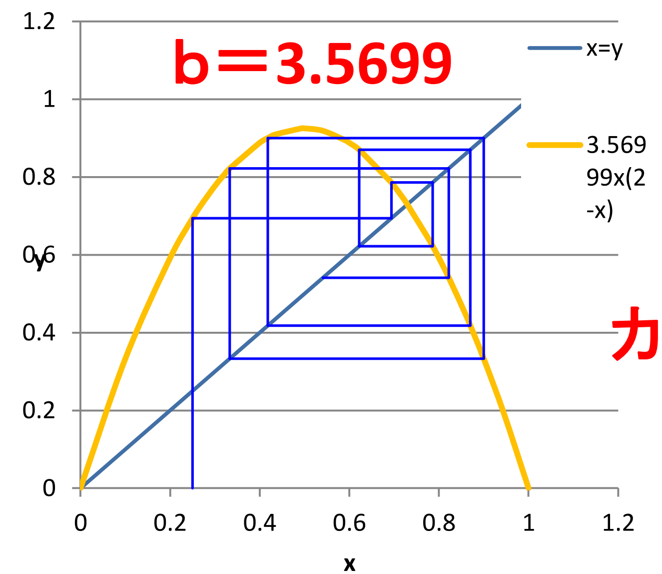
$$U(t+\Delta t)=aU(t)\left[C-U(t)\right]\cdot\Delta t+U(t)$$

$$U_{n+1}=bU_n(1-U_n)$$

⊿tが小さければ、tに数値を入れてパソコンで計算可能





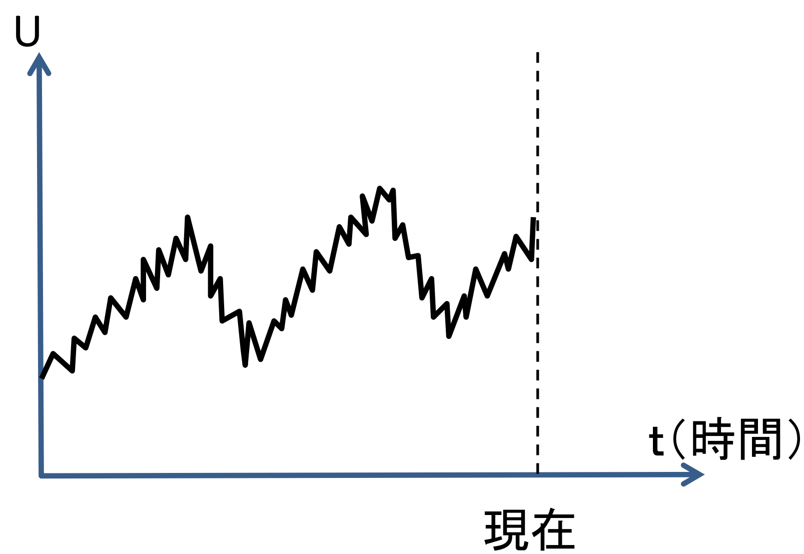


カオス

熱と恋
フーリエ変換

どんな複雑な波もシンプルな波の足し算である

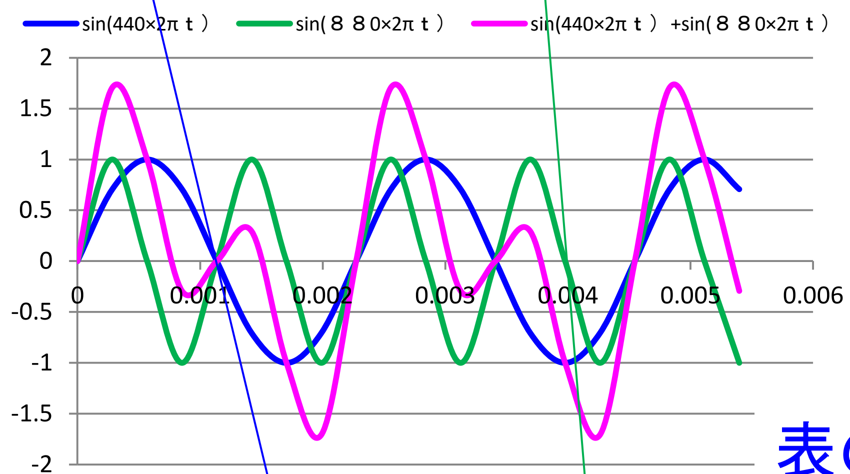
私が高校の時、数学の先生が言っていた今でも忘れない言葉です

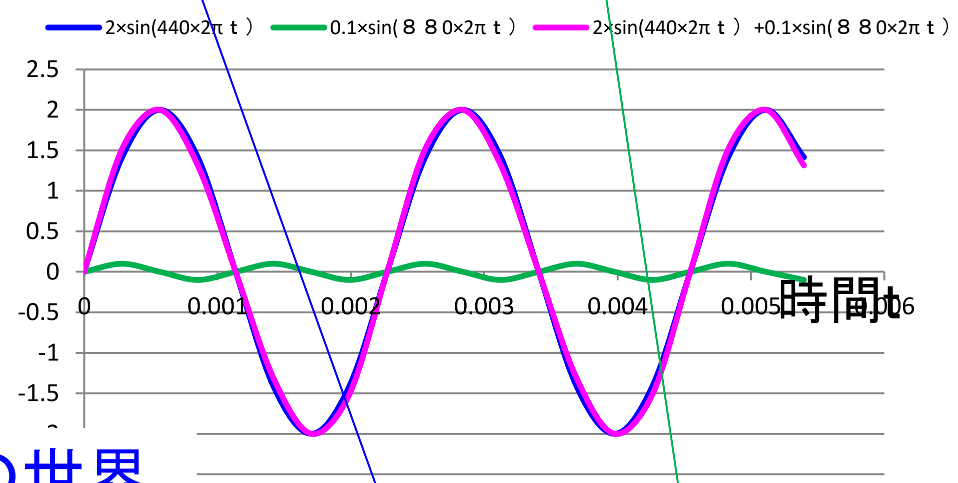


時報　ポッポッポ　ポーン

440Hz　880Hz

$$y(t) = 1 \times \sin(440 \times 2\pi t) + 1 \times \sin(880 \times 2\pi t) \qquad y(t) = 2 \times \sin(440 \times 2\pi t) + 0.1 \times \sin(880 \times 2\pi t)$$

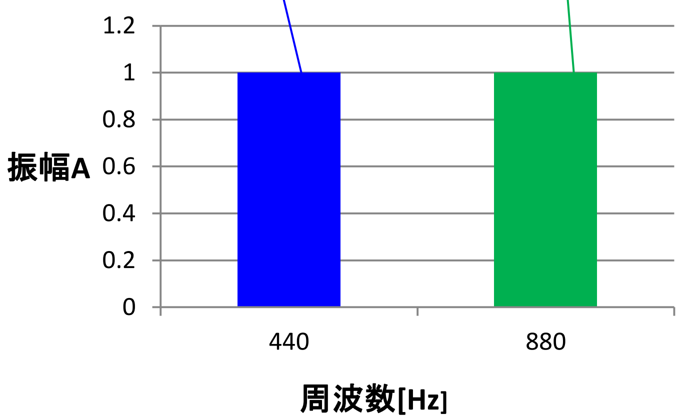




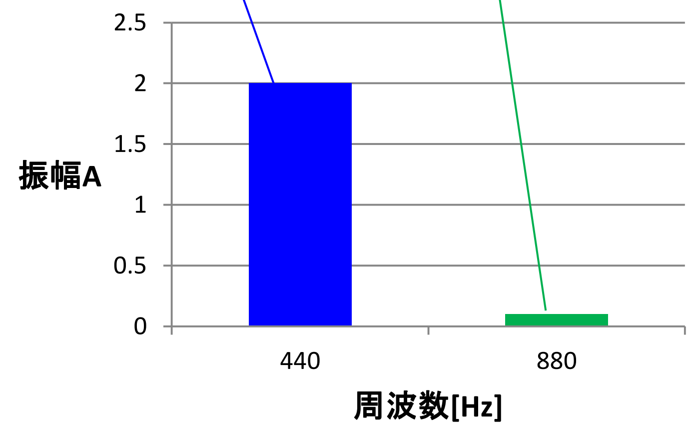
表の世界

フーリエ変換

裏の世界



パワースペクトル



どんな複雑な波もシンプルな波の足し算である

シンプルな波　$y(t) = A \sin \omega t$

複雑な波　$y(t) = \sum_{\omega} A(\omega) \sin \omega t$

整数

ω : 周波数　　$A(\omega)$: 周波数ωの波の振幅

↓

実数

$y(t) = \int A(\omega) \sin \omega t d\omega$

オイラーの公式

$\cos t + i \sin t = e^{it}$

↓

sin波だけでなく cos波も仲間に入れたい

$$\boxed{y(t) = \int A(\omega) e^{i\omega t} d\omega}$$

虚数i は、我々の目に見えない「仏の世界」
愛i が世界に平和をもたらす

将来を予測するとは、現在(t)とちょっと先の未来(t+dt)の間の変化を知ること
→ 微分すること

$$y(t) = \int A(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

↓ tで微分すると

$$\frac{dy(t)}{dt} = \int \underline{iw}A(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

振動　場所固定、時間的に変化
波動　場所的、時間的何れも変化
熱　　場所的、時間的何れも変化

振動の式→ $\boxed{\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -kx}$ $\cdots①$

左辺は　$x(t) = \int A(\omega)e^{i\omega t}dw$　2階微分する

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \int (i\omega)^2 A(\omega)e^{i\omega t}dw = \int -\omega^2 A(\omega)e^{i\omega t}dw \quad \cdots②$$

右辺は　$-kx = \int -kA(\omega)e^{i\omega t}dw \quad \cdots③$

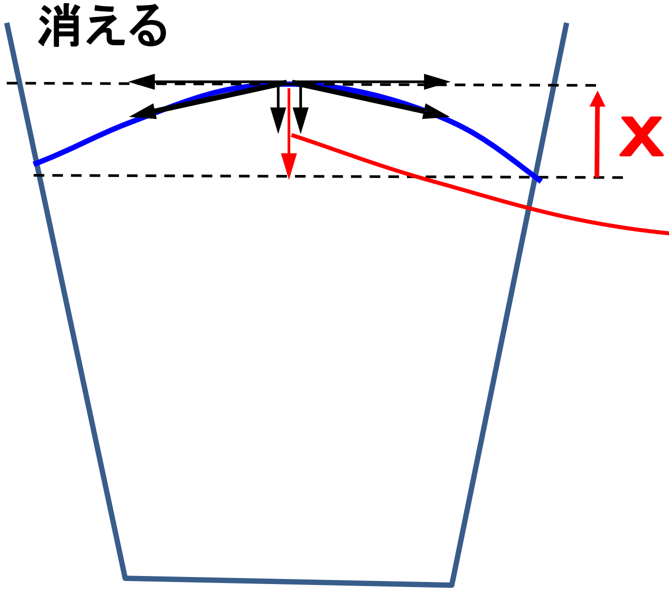
②=③なので　$\omega^2 = k$　よって　$\omega = \sqrt{k}$

場所(x)の振動の周波数(ω)は$\sqrt{k}$

表面張力の式

$$F = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

下向き以外の力はつりあって
消える



波の位置

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \underline{-x}$$

mやkは省略

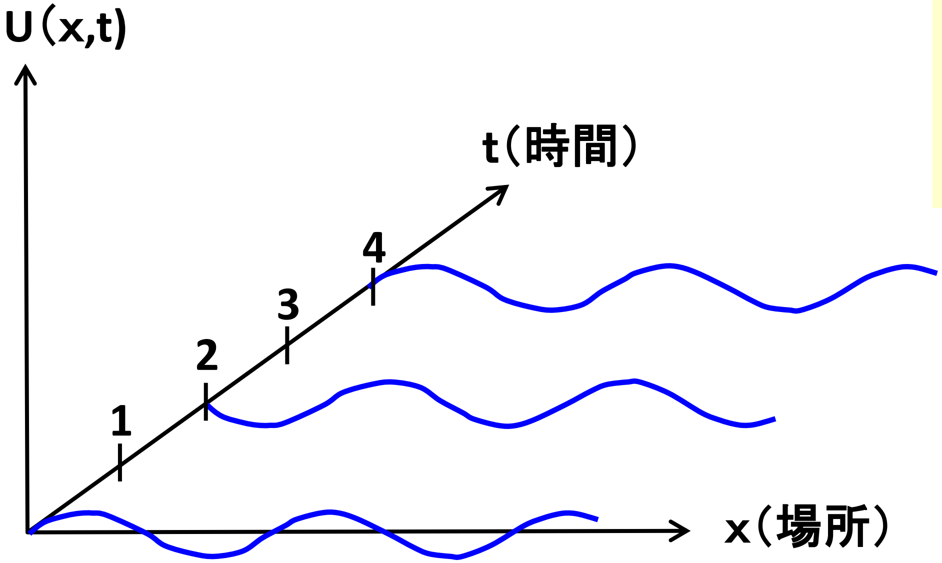
力
（表面張力）

なぜ位置の「x」が表面張力になるか？
　バネに錘を下げるとバネが錘に応じて伸びます
　　→　フックの法則

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x \qquad \text{解くと}$$

$$x = \sin x$$ ← 2階微分するとマイナスになる関数は？

「ゆらゆら」する関数



振動　場所固定、時間的に変化
波動　場所的、時間的何れも変化
熱　場所的、時間的何れも変化

$$U(x,t)=\iint A(k,\omega)e^{ikx}\cdot e^{i\omega t}dkd\omega$$

場所の項を付加

熱の基本式→ $\boxed{\dfrac{\partial U}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}}$

左辺　xを固定して微分

$$i\omega\times A(k,\omega)e^{ikx}\cdot e^{i\omega t}\quad\cdots①$$

右辺　t を固定して微分

$$(ik)^2 A(k,\omega)e^{ikx}\cdot e^{i\omega t}\quad\cdots②$$

i 乗が消えるのがミソ

$$①=②\qquad i\omega=-k^2\qquad \omega=ik^2$$

$$U(x,t)=\iint A(k,\omega)e^{ikx}\cdot e^{-k^2 t}dkd\omega$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

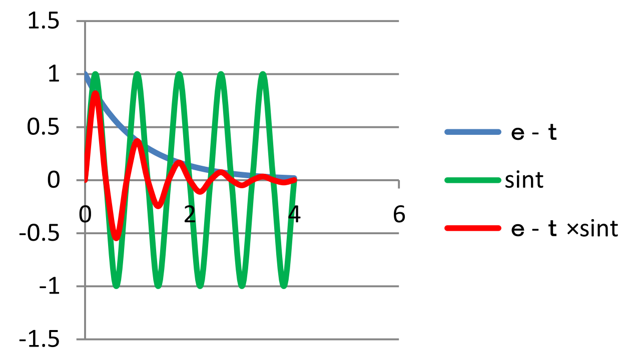
熱の基本式

はかなく消えゆく恋心を数式で表すと？

$$e^{-t} \times \sin t$$

掛け算： 因子同士が関連
足し算： 因子同士が独立

sintは、ゆらゆら揺れるあなたの恋心



$$U(x,t) = \iint A(k,\omega) e^{ikx} \cdot e^{-k^2 t} dk d\omega$$

熱

tが大きくなると、この項は小さくなる

ゆらゆらと心揺れながら、最後は恋の熱が冷める
愛情（i 乗）が消えたら、近づくは絶対零度

どんな熱も、時間と共にどこかへ逃げていき0に近づく

未来を予測するツール

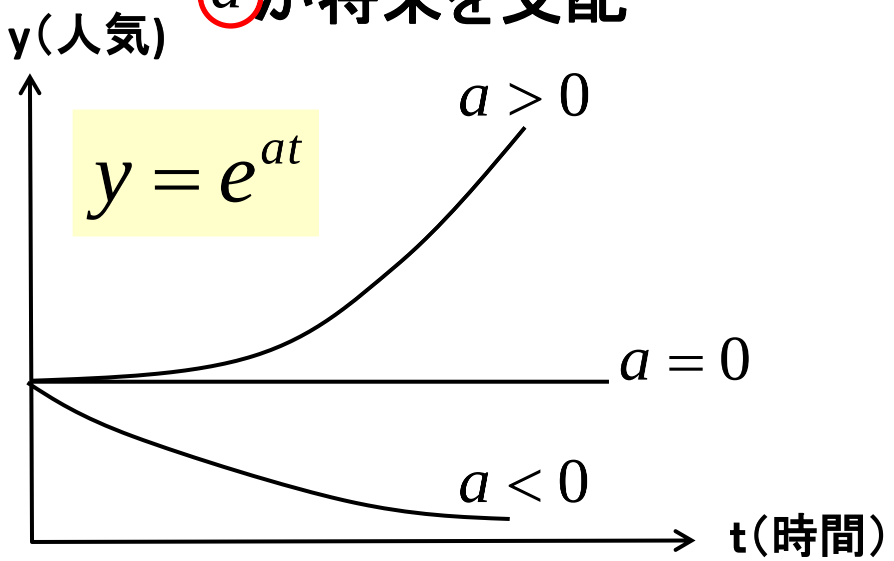
①微分方程式

→フーリエ変換

②固有値（eigen value)

どんな分野の達人も、この固有値を何となくつかんでいるからこそ、良い仕事ができる（西成教授曰く）

aが将来を支配



固有値を r として、同じ操作をn回すると

将来の状態はr^nで表せる

r＞1なら∞
r＝1なら1のまま
r＜1なら0に近づく

どんな現象も $y_n = r^n$ に導ける

$$y_{n+1} = 固有値 \times y_n$$

フィボナッチ数列　1、1、2、3、5、8・・・

どんな現象も $y_n = r^n$ に導ける

$$\boxed{y_n = y_{n-1} + y_{n-2}}$$

$r^n = r^{n-1} + r^{n-2}$　　$n=2$を代入して

$r^2 = r + 1$

$r^2 - r - 1 = 0$　　$r = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$　**固有値2つ**

$y_n = \bigcirc r_1^{\ n} + \triangle r_2^{\ n}$

$$= p\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + q\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$y_n = \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

≒1.6　　**≒-0.6**

↑

最大固有値　　**この項は0に**

$y_0 = 1$　　$y_1 = 1$　　$y_2 = 2 \cdots\cdots$

$n=0$　のとき　　$p+q=1$

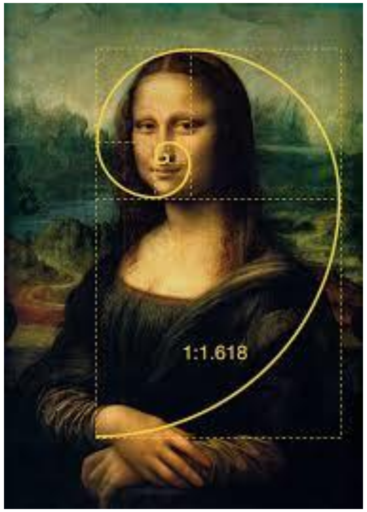
$n=1$　のとき　　$p-q=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

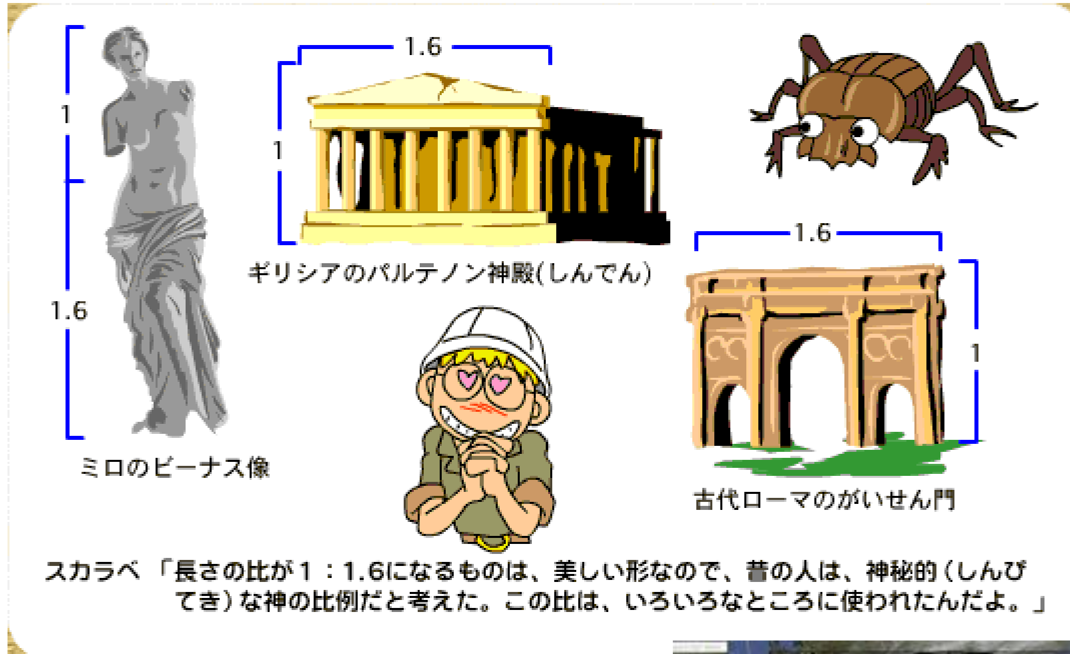
連立方程式を解いて

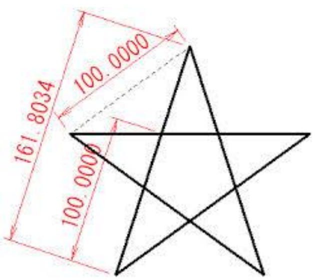
$p = \dfrac{5+\sqrt{5}}{10}$　　$q = \dfrac{5-\sqrt{5}}{10}$

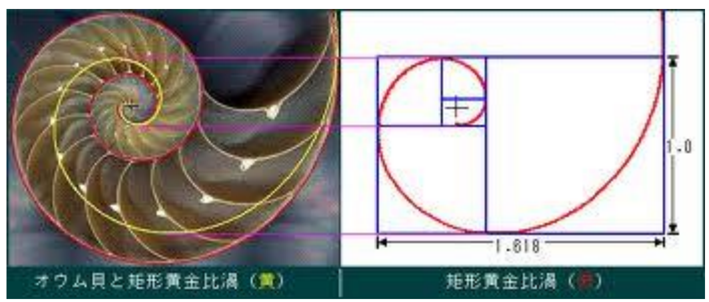
黄金比　1:1.618

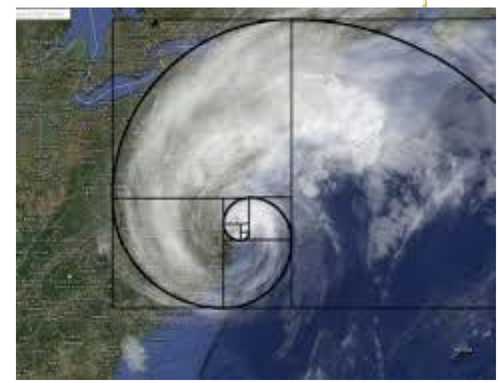
Golden ratio

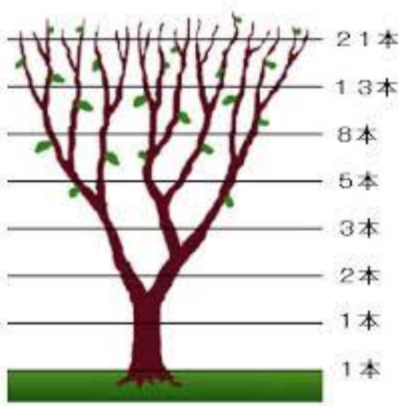


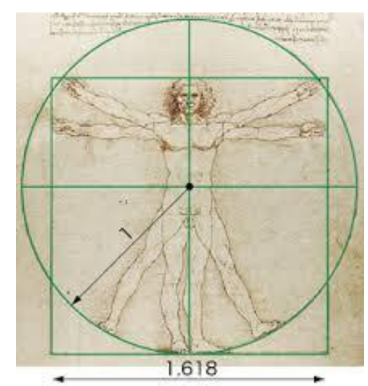












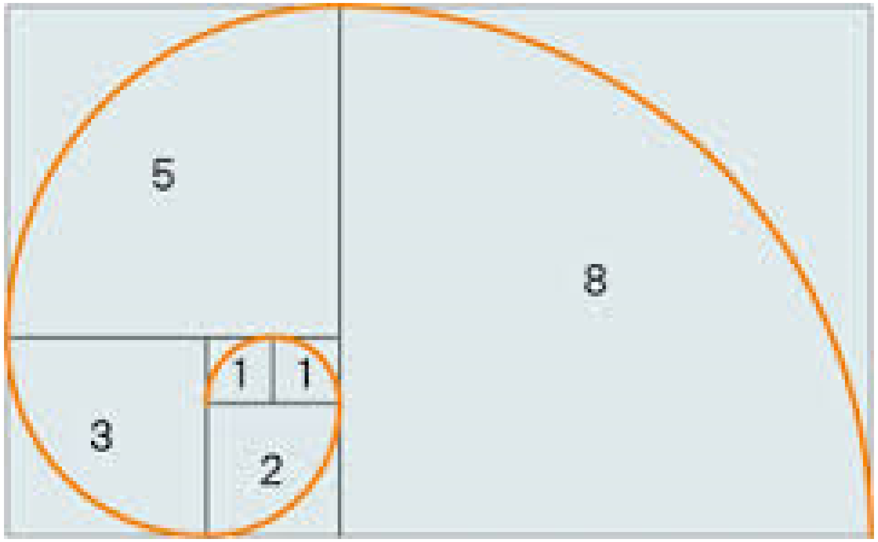
Fibonacci series

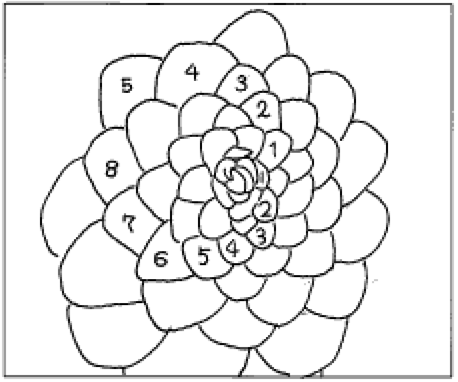
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ・・・・・・

$$\frac{1}{1},\frac{2}{1},\frac{3}{2},\frac{5}{3},\frac{8}{5},\frac{13}{8},\frac{21}{13},\frac{34}{21},\frac{55}{34},\frac{89}{55},\frac{144}{89},\frac{233}{144}\cdots\cdots\cdots$$

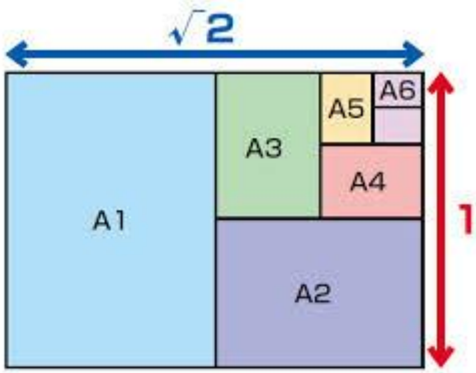
1, 2, 1.5, 1.667, 1.6, 1.625, 1.615, 1.619, 1.618, 1.618,1.618・・・・・・・

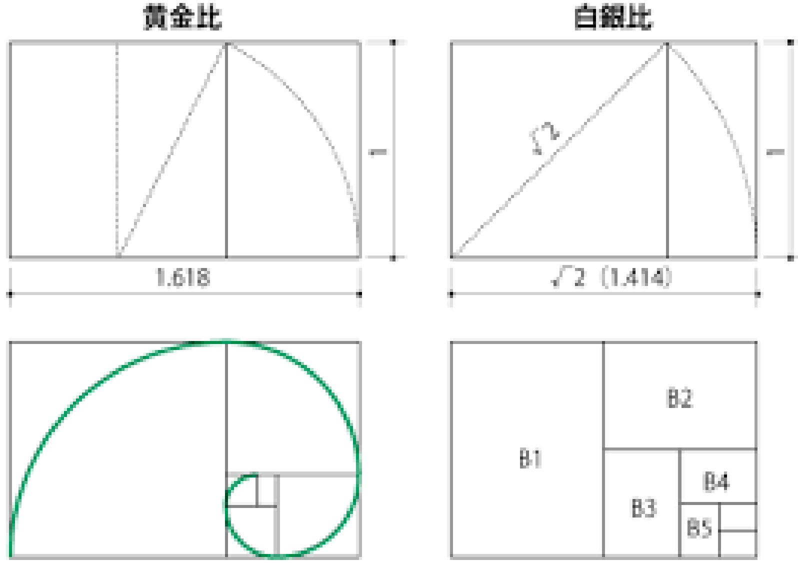
Golden ratio



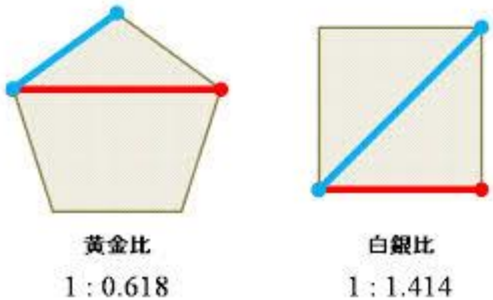


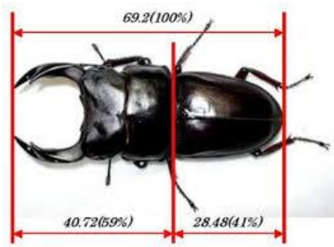
Silver ratio

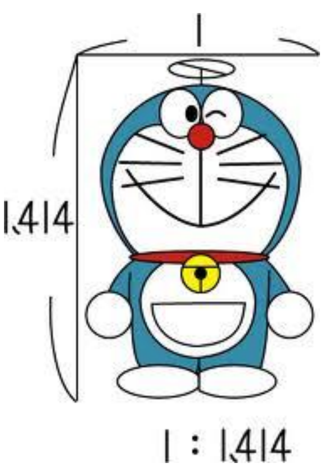


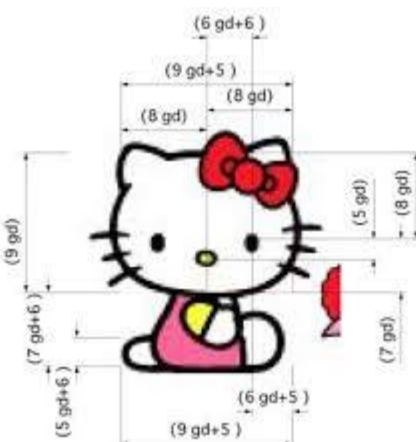


日本的な美









共鳴、共振

一休さんが人差し指1本で鐘を揺らす

$$F = m\frac{d^2x}{dt^2} = \underline{-kx} + \underline{A\cos\omega t}$$

振動　一休さんがポンポンと押す力

一休さんが押さない時　第２項はゼロ

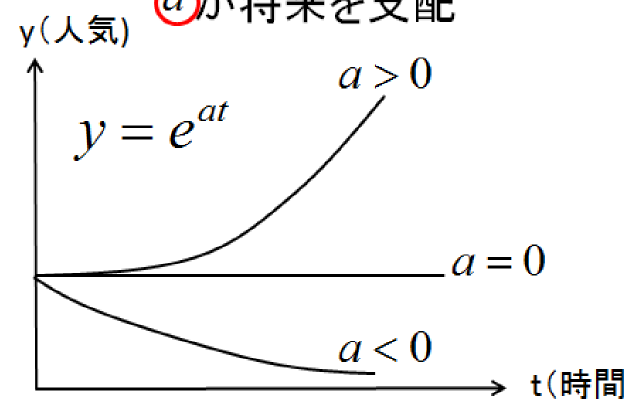
$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

$\boxed{\text{微分の場合は}\quad x = e^{at}}$

$$a^2e^{at} = -\frac{k}{m}e^{at} \qquad a^2 = -\frac{k}{m} \qquad a = i\sqrt{\frac{k}{m}}$$

固有値

aが将来を支配



将来の状態$x = e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t}$

$$= \cos\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t + i\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t$$

← オイラーの公式

$$\cos t + i\sin t = e^{it}$$

虚数の世界は無視して、$x = \cos\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t$

＝ω（固有振動数）

一休さんの振動数　　鐘の固有振動数

$$x = \frac{F}{m}\frac{1}{\omega^2 - \omega'^2}(\cos\omega' t - \cos\omega t)$$

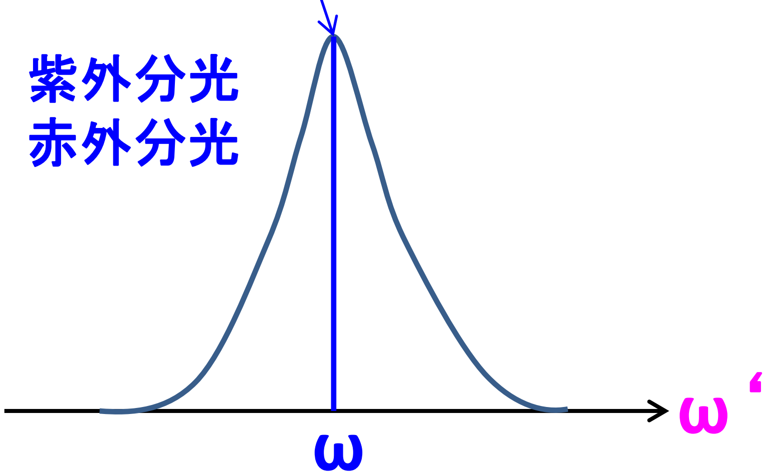
$\omega' = \omega + \Delta\omega$　とおいて$\Delta\omega \to 0$

$$\lim_{\omega'\to\omega} x(t) = \frac{F}{m}\frac{\Delta\omega t}{(2\omega+\Delta\omega)(-\Delta\omega)}\boxed{\frac{\cos(\omega t + \Delta\omega t) - \cos\omega t}{\Delta\omega t}}$$

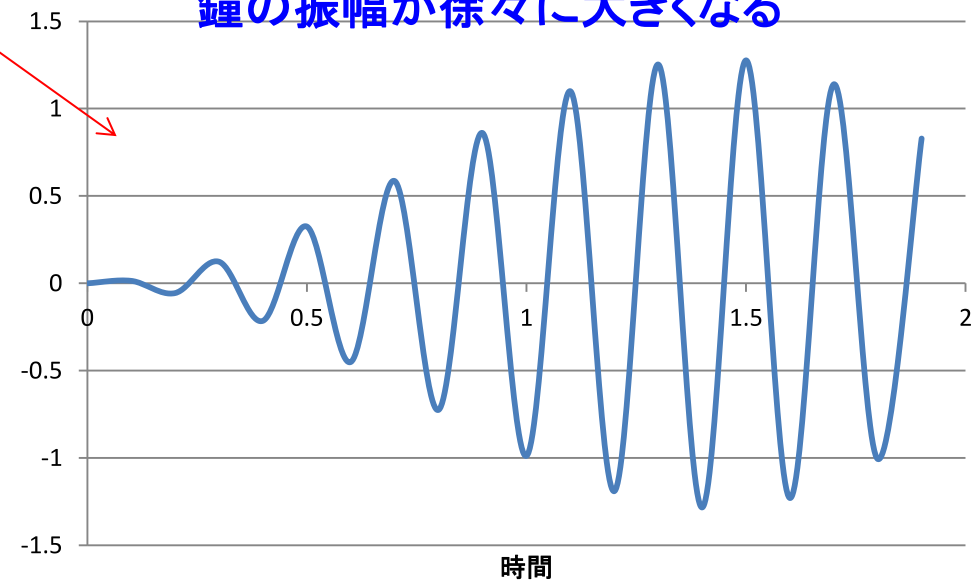
$$= \frac{F}{2m\omega}\boxed{t\sin\omega t}$$

注）本ではωで微分すると書いてありますが、同じ意味です

ω＝ω‘で共鳴する



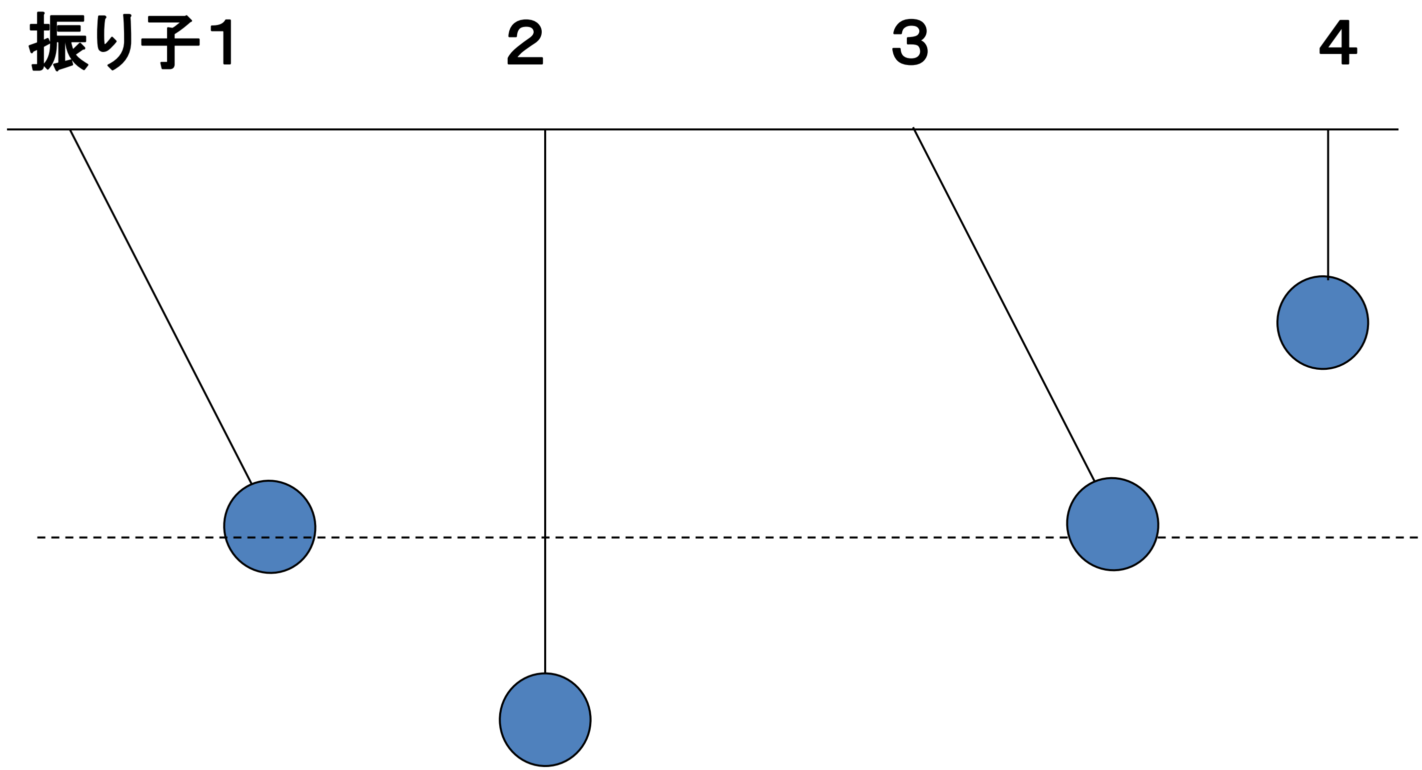
鐘の振幅が徐々に大きくなる



光

共振、共鳴とは？

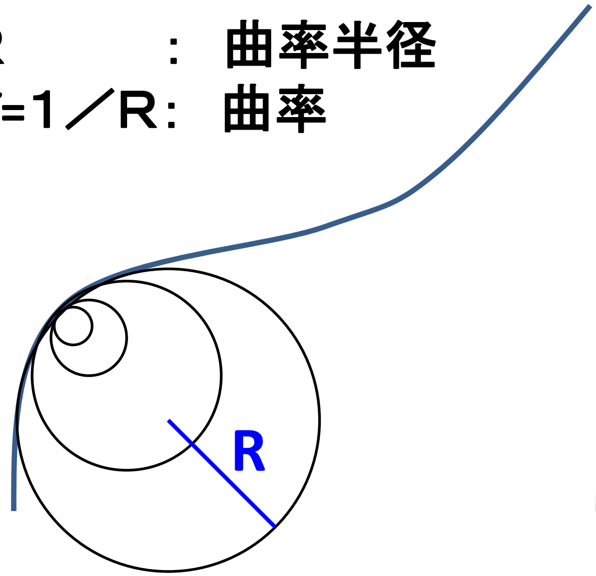
同じ紐にぶら下がっている振り子1が振動すると
2～4のどの振り子が振動始めるか？

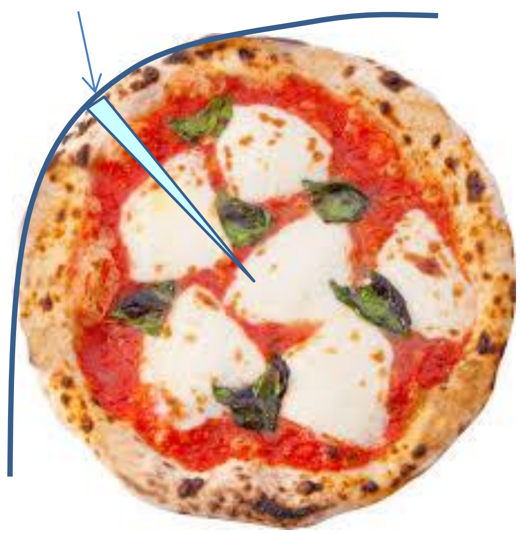


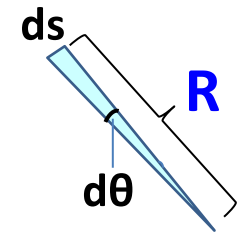
振り子が短いほど速く振動する（振動数大）
長いほどゆっくり振動する（振動数小） ⇐ 固有振動数

曲率

R　　　：曲率半径
κ=1／R：曲率





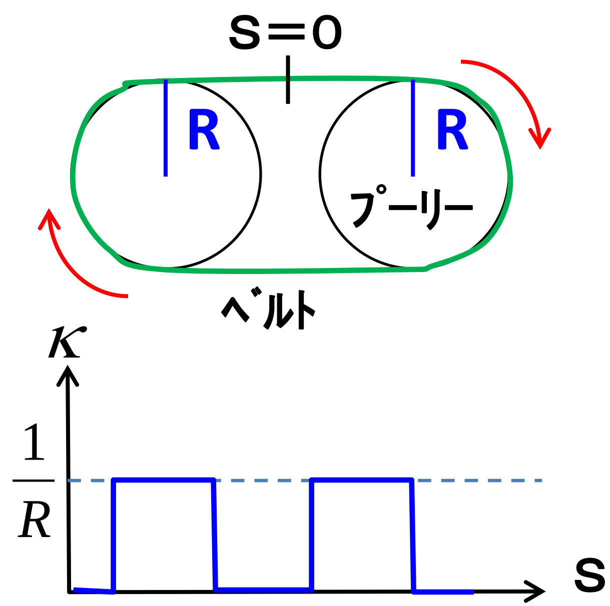


$$Rd\theta = ds$$

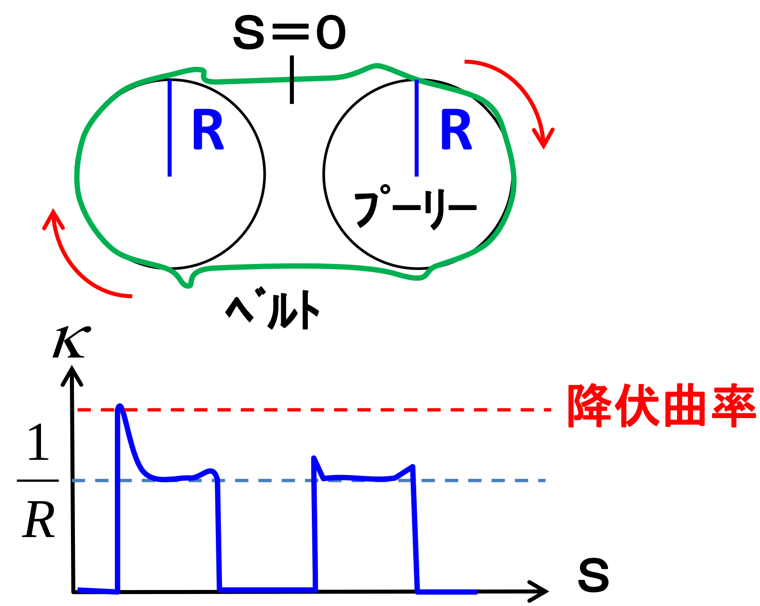
$$R = \frac{ds}{d\theta}$$

$$\kappa = \frac{1}{R} = \frac{d\theta}{ds}$$

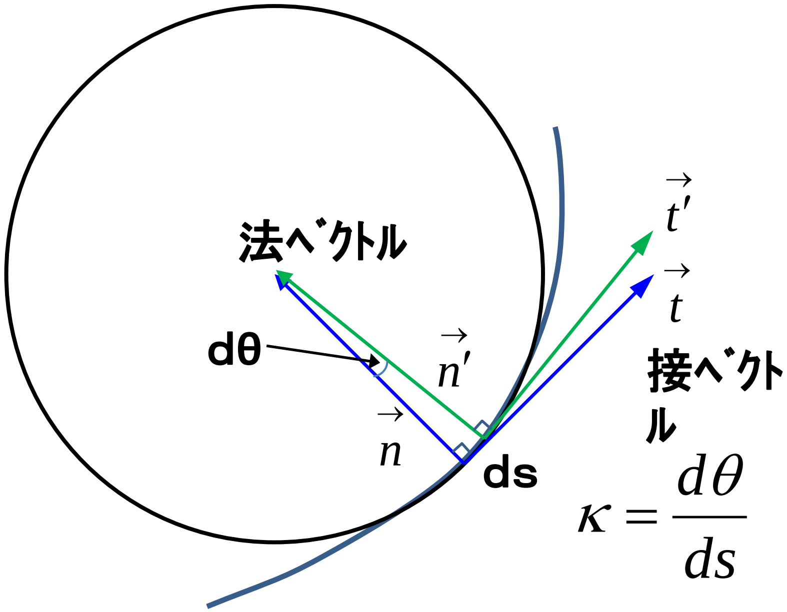
ベルトのどこが壊れやすいか？

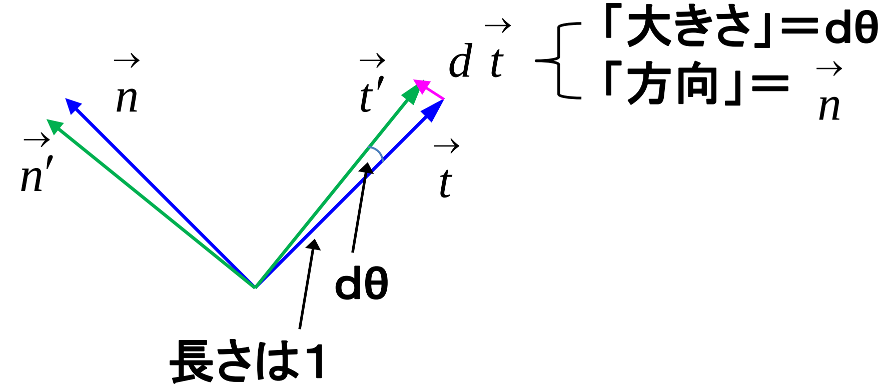


高速度カメラで撮影



フレネー（フレネ＝セレ）の式





$$\kappa = \frac{d\theta}{ds}$$

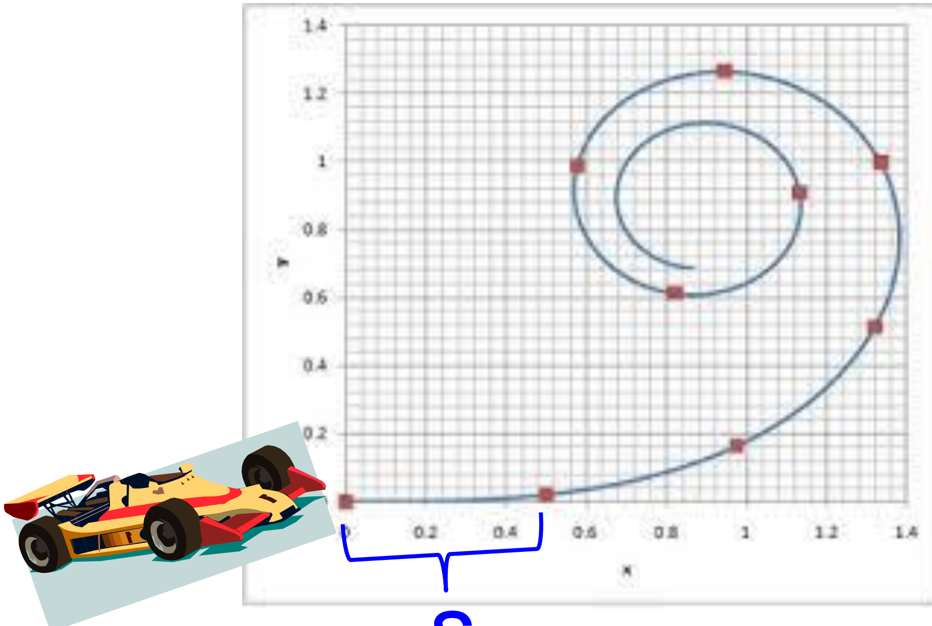
$\kappa \cdot ds = d\theta$ を代入

$$d\vec{t} = d\theta \cdot \vec{n} \qquad d\vec{t} = \kappa \cdot ds \cdot \vec{n}$$

フレネー（フレネ＝セレ）の式 $\boxed{\frac{d\vec{t}}{ds} = \kappa \cdot \vec{n}}$ 絶対値をとると $\left|\frac{d\vec{t}}{ds}\right| = \kappa(\Theta\ |\vec{n}| = 1)$

dsの前後の接線の傾きの変化の大きさが曲率

クロソイドカーブの式



S

Kは曲率

$$\boxed{\kappa = 2s}$$

$$\kappa = \frac{d\theta}{ds} = 2s$$

$$\int d\theta = \int 2s ds \qquad \theta = s^2$$

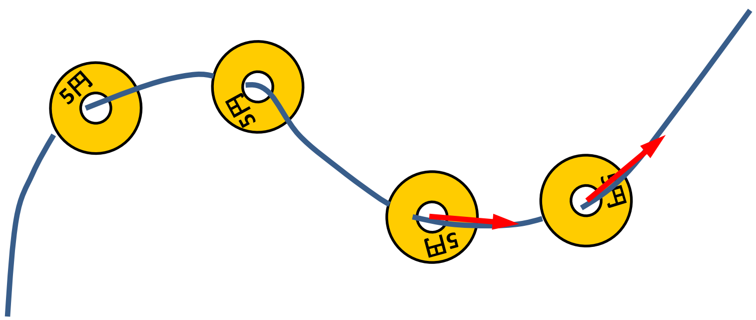
v(速度)$\cdot t$(時間)$= s$(距離)を代入して

$$\theta = v^2 \cdot t^2$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 2v^2 \cdot t$$ ← t秒後のハンドルの角度

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = 2v^2$$ ← ハンドルの角度の変化は速度一定なので一定

3次元空間の曲率



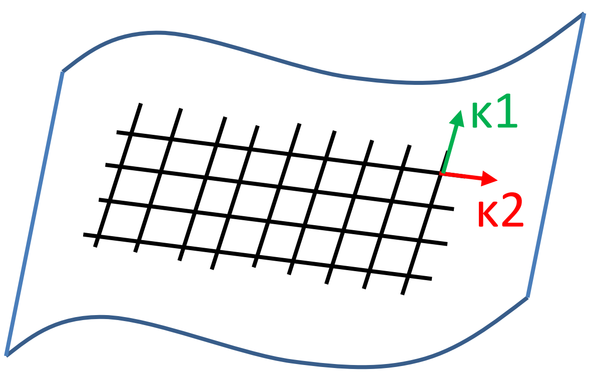
「ひも」と5円玉は垂直

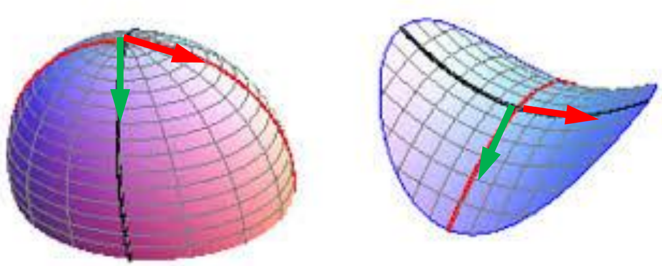
5円玉の法線（垂直な線）は「ひも」の接線

2つの接線の変化が「曲率（κ）」

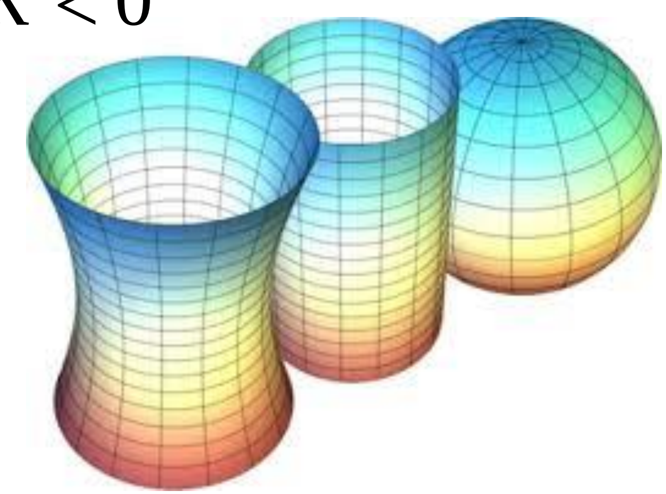
2枚の5円玉に書かれた「5円」の文字の回転角の変化が「ねじれ（τ）」

ガウス曲率　$K = \kappa 1 \cdot \kappa 2$





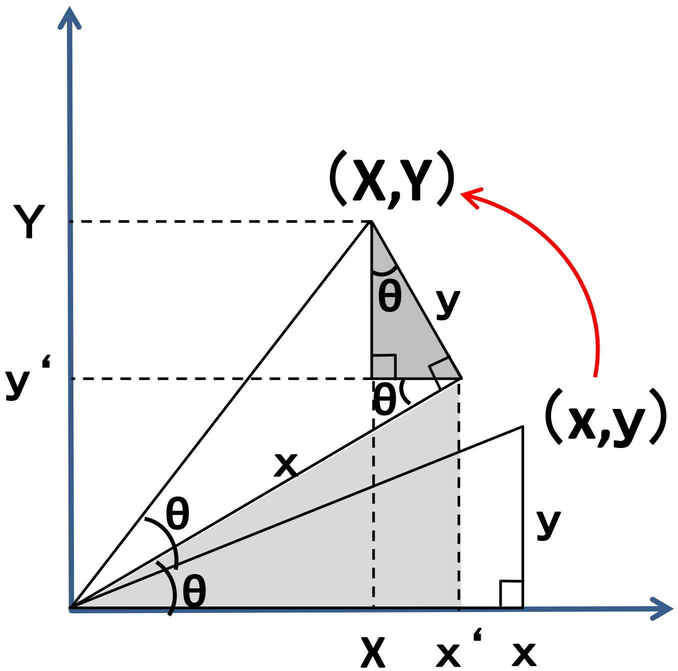
$K < 0$　$K = 0$　$K > 0$



代数
（回転）

多くの人が避けてとおりたい分野にこそ、
現実社会の課題をブレイクスルーする糸口がある（西成教授曰く）

回転



$$X = x\cos\theta - y\sin\theta$$

$$Y = x\sin\theta + y\cos\theta$$

(x, y)を抜き出す

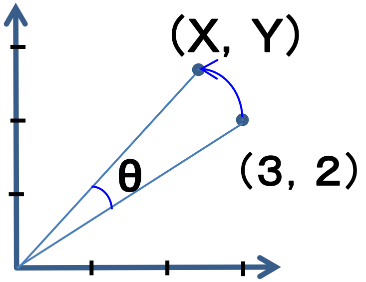
$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{\text{これがR（Rotation)!}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

SC-SCと覚える

エス･シー･マイナス･エス･シー

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

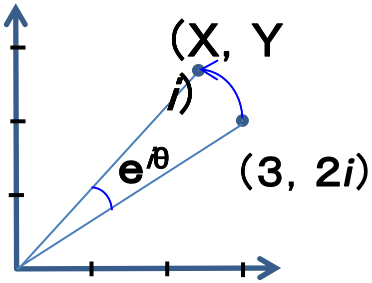
実平面



$$(x, y) = (3,2)\text{とする}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{e^{i\theta}} \boxed{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 3\cos\theta - 2\sin\theta \\ 3\sin\theta + 2\cos\theta \end{pmatrix}$$

複素平面



$$e^{i\theta}\boxed{(3+2i)} = (X + iY)$$

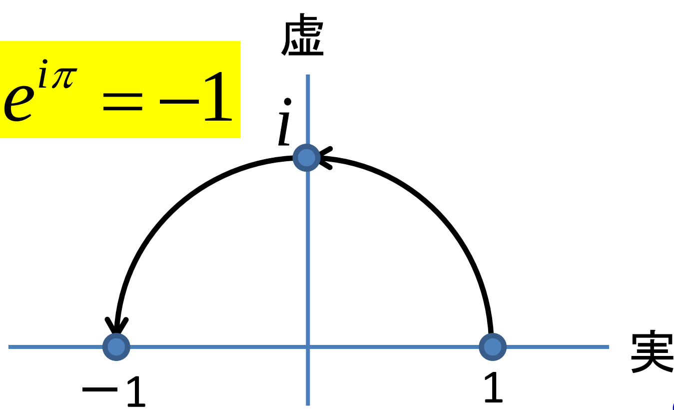
掛けるだけで回転

オイラーの公式

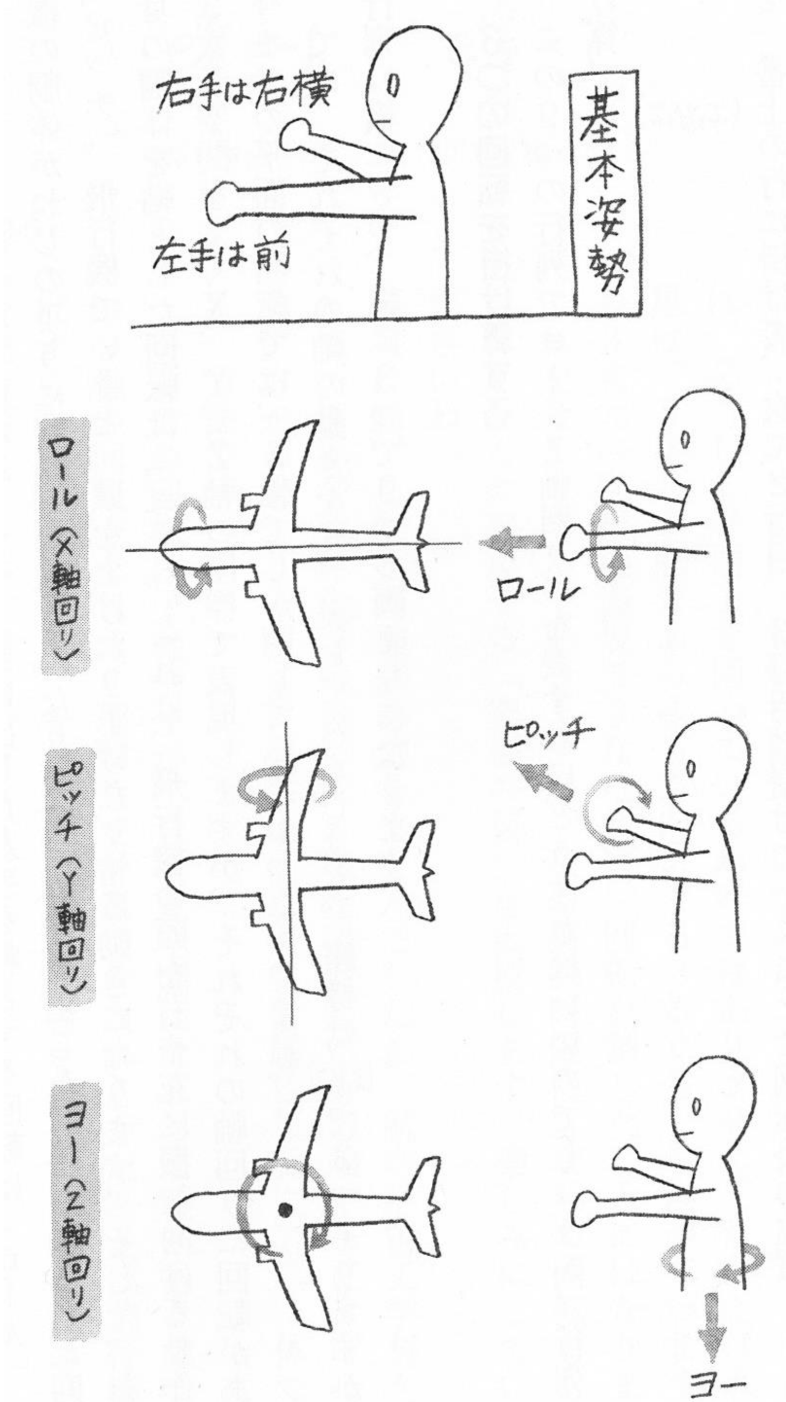
$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$X + iY = e^{i\theta}(3+2i) = (\cos\theta + i\sin\theta)(3+2i)$$
$$= 3\cos\theta + 2i\cos\theta + 3i\sin\theta - 2\sin\theta$$
$$= (3\cos\theta - 2\sin\theta) + i(3\sin\theta + 2\cos\theta)$$

$$e^{i\pi} = -1$$



90°首を回して隣の人に向くと愛（i）が生まれるか？



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

y、z平面の点は回転するがx軸は不変

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

z、x平面の点は回転するがy軸は不変

R（SC−SC）

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

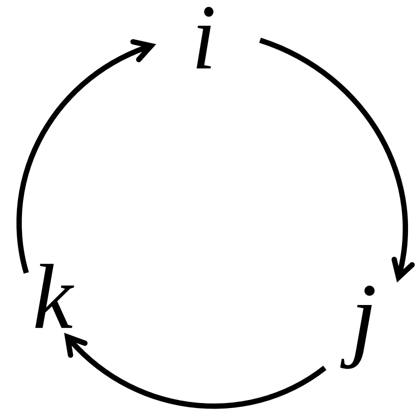
x、y平面の点は回転するがz軸は不変

四次元数（クオータニオン）の規則

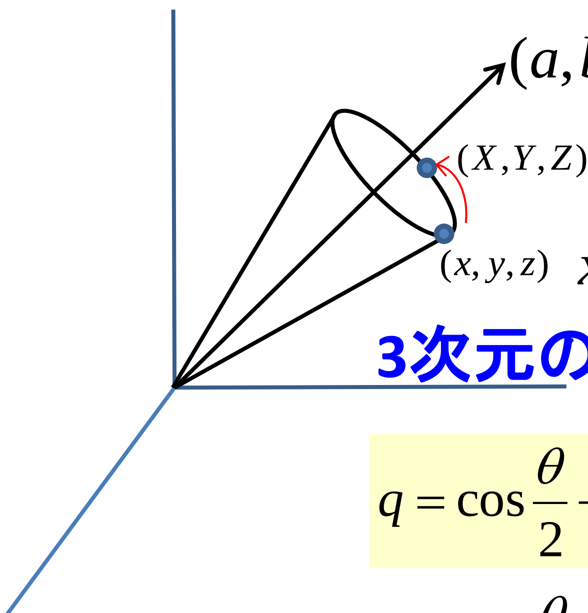
$$i \times i = -1 \qquad i \times j = -j \times i \qquad i \times j = k$$

$$j \times j = -1 \qquad j \times k = -k \times j \qquad j \times k = i$$

$$k \times k = -1 \qquad k \times i = -i \times k \qquad k \times i = j$$



円を逆方向に回る掛け算のときはマイナス



$xi + yj + zk$と表す

3次元の回転を考える

$$q = \cos\frac{\theta}{2} + (a\sin\frac{\theta}{2})i + (b\sin\frac{\theta}{2})j + (c\sin\frac{\theta}{2})k$$

← **2次元のR(SC-SC)に相当するもの**

$$\bar{q} = \cos\frac{\theta}{2} - (a\sin\frac{\theta}{2})i - (b\sin\frac{\theta}{2})j - (c\sin\frac{\theta}{2})k$$

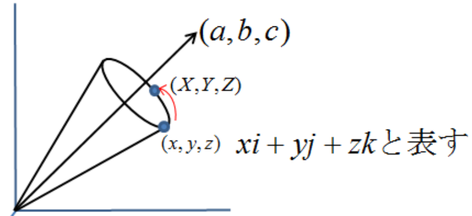
$$q \cdot (xi + yj + zk) \cdot \bar{q} = Xi + Yj + Zk$$

qと複素共役の$\bar{q}$でサンドイッチする

２次元空間で確認

z 軸で回転するので(a,b,c)は

(0,0,1) つまり$a=0, b=0, c=1$



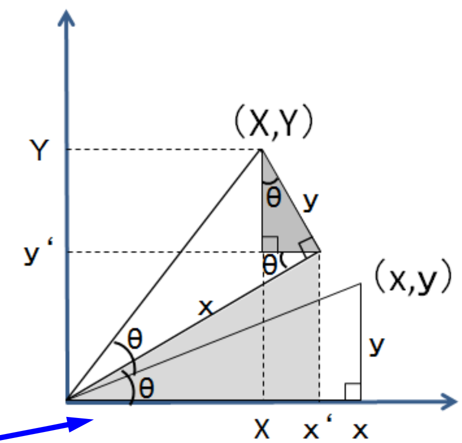
qと複素共役の$\bar{q}$でサンドイッチする

$$q=\boxed{\cos\frac{\theta}{2}+(\sin\frac{\theta}{2})k} \quad \bar{q}=\boxed{\cos\frac{\theta}{2}-(\sin\frac{\theta}{2})k}$$

$$\left[\boxed{\cos\frac{\theta}{2}+(\sin\frac{\theta}{2})k}\right]\cdot(xi+yj)\cdot\left[\boxed{\cos\frac{\theta}{2}-(\sin\frac{\theta}{2})k}\right]$$

$$=\underline{(x\cos\theta-y\sin\theta)i+(x\sin\theta+y\cos\theta)j=Xi+Yj}$$

一致



$$q=\left[\cos\frac{\theta}{2}+(\sin\frac{\theta}{2})k\right]\cdot(xi+yj)\cdot\left[\cos\frac{\theta}{2}-(\sin\frac{\theta}{2})k\right]$$

$$=(x\cos\frac{\theta}{2}\cdot i+y\cos\frac{\theta}{2}\cdot j+x\sin\frac{\theta}{2}\cdot j-y\sin\frac{\theta}{2}\cdot j)(\cos\frac{\theta}{2}-(\sin\frac{\theta}{2})k)$$

$$=(x\cos^2\frac{\theta}{2}-y\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2})i+(x\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}+y\cos^2\frac{\theta}{2}j)$$

$$+(-x\sin^2\frac{\theta}{2}-y\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2})i+(x\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}-y\sin^2\frac{\theta}{2}j)$$

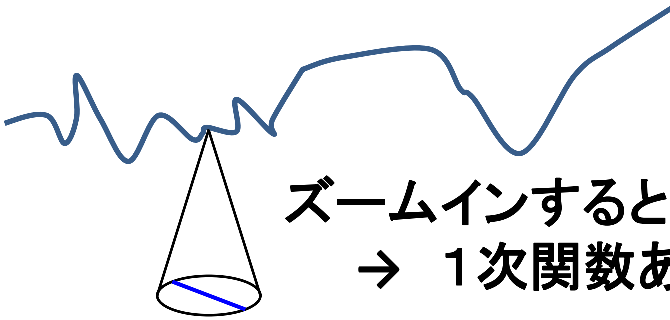
$$=(x\cos\theta-y\sin\theta)i+(x\sin\theta+y\cos\theta)j=Xi+Yj$$

テイラー展開

安定性

商品開発ができる

テイラー展開 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$

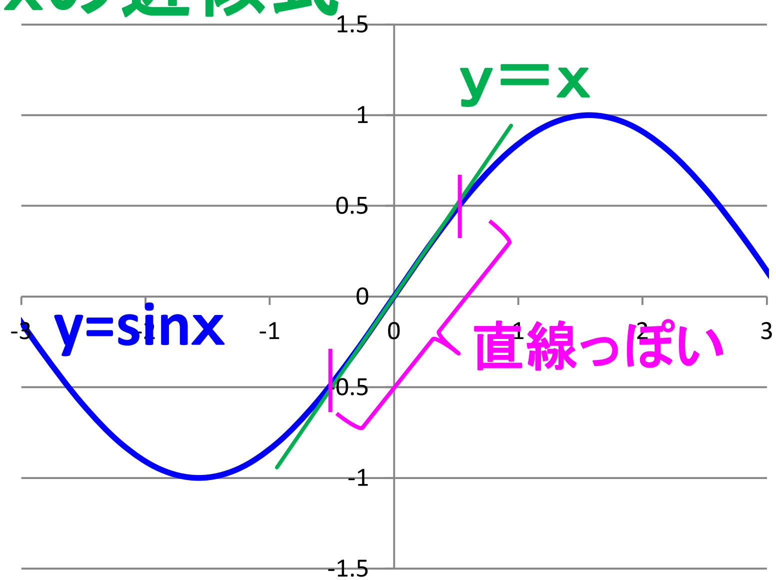


ズームインすると直線になっている

→ 1次関数あるいは2次関数で近似する

近似できないものは「フラクタル」

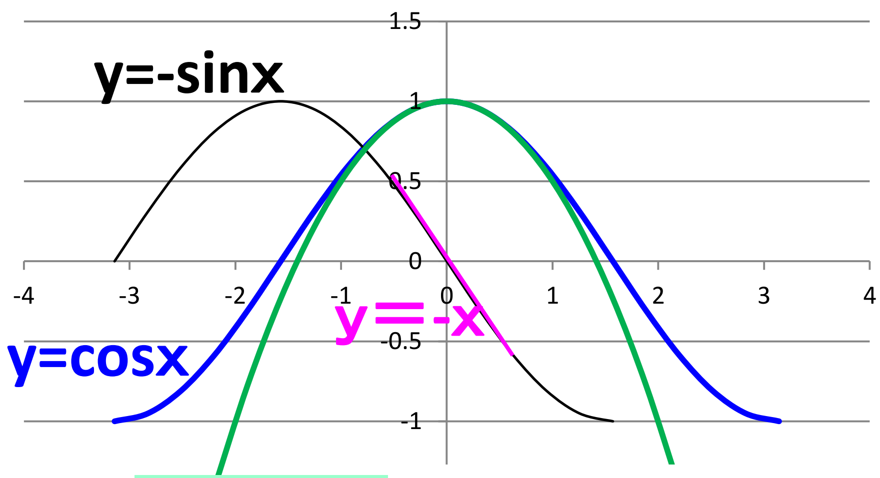
sinxの近似式



← x=0付近では、sinxをxとする

「アタリ」をつける

cosxの近似式



$y = ax^2 + 1$ ← 「アタリ」をつける

$$y = \cos x$$

$$\frac{dy}{dx} = -\sin x \fallingdotseq -x$$

$$y = ax^2 + 1$$

$$\frac{dy}{dx} = 2ax$$

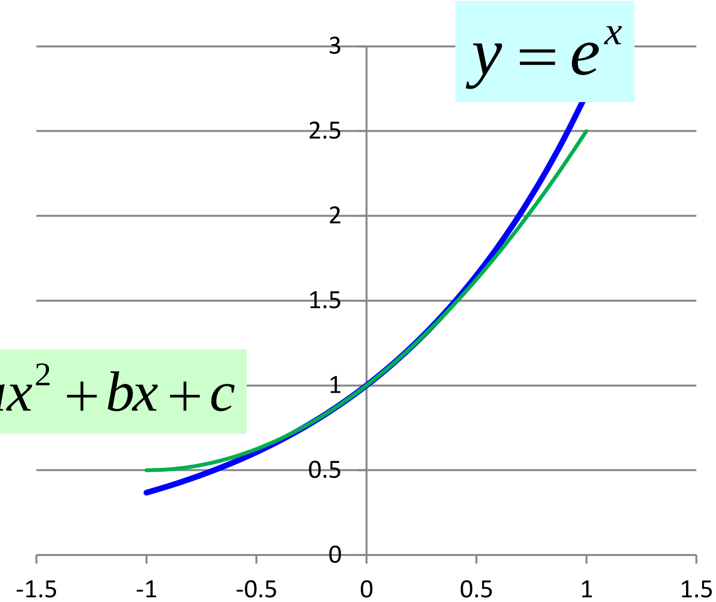
$$2ax = -x$$

$$a = -\frac{1}{2}$$

$$\boxed{y = -\frac{x^2}{2} + 1}$$

← x=0付近では、cosxは左式とする

$y=e^x$の近似式



「アタリ」をつける→ $y=ax^2+bx+c$

$$y=ax^2+bx+c \qquad y=e^x \qquad x=0,\quad y=1\text{を代入して}\qquad c=1$$

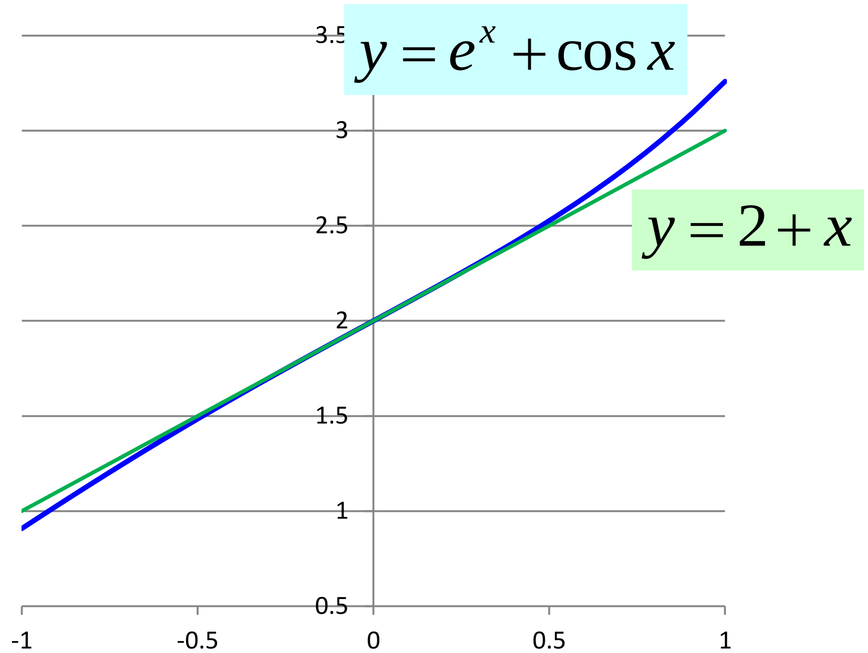
$$y'=2ax+b \qquad y'=e^x \qquad x=0,\quad y'=1\text{を代入して}\qquad b=1$$

$$y''=2a \qquad y''=e^x \qquad x=0\text{を代入して}\quad y''=1 \quad 1=2a \qquad a=\frac{1}{2}$$

$$\boxed{e^x \fallingdotseq 1+x+\frac{x^2}{2}}$$ **テイラー展開**

$y = e^x + \cos x$のテイラー展開は？

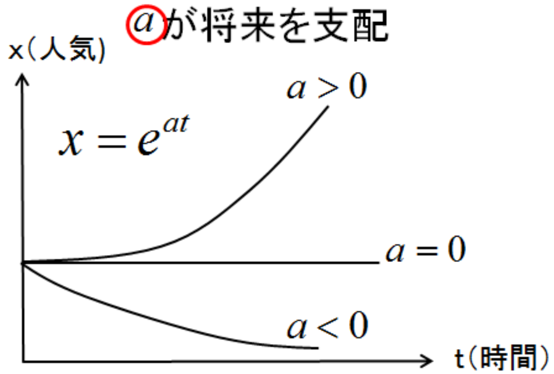
$$y = \left(\boxed{1 + x + \frac{x^2}{2}} \right) + \left(\boxed{1 - \frac{x^2}{2}} \right) = \boxed{2 + x}$$



x＝0付近でないところで近似する場合は、その位置に近いxの値を代入する

「安定性解析」では、「外乱が小さい時」という条件下で証明する

$$\frac{dx}{dt} = ax$$ ← **xの時間(t)変化が自分自身に比例する**



$$\frac{dx}{dt} = ax + b$$ 安定している状態は $\frac{dx}{dt} = 0$

$$x = -\frac{b}{a}$$ 外乱εを足して $x = -\frac{b}{a} + \varepsilon$

元の式に代入して、

左辺は、$\frac{d}{dt}\left(-\frac{b}{a} + \varepsilon\right) = \frac{d\varepsilon}{dt}$ 右辺は、$a\left(-\frac{b}{a} + \varepsilon\right) + b = a\varepsilon$

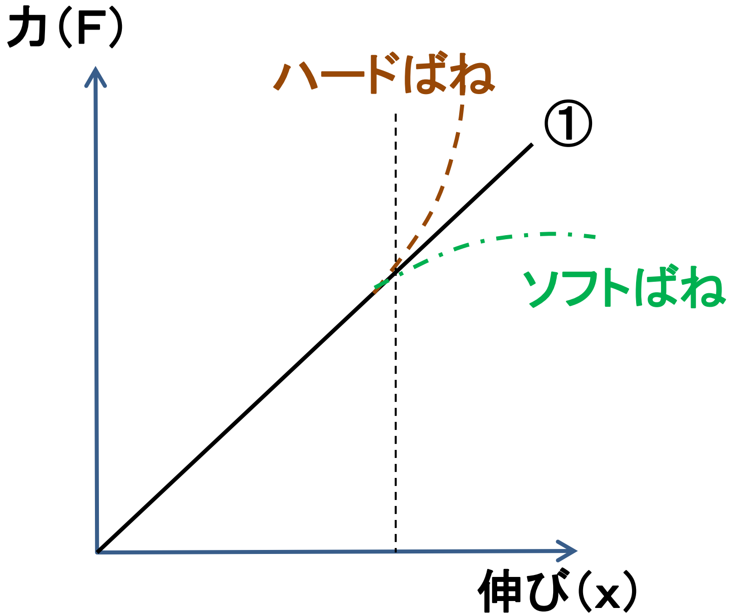
$$\frac{d\varepsilon}{dt} = a\varepsilon$$

$a > 0$ 吹っ飛ぶ

$a < 0$ 安定

振動と波

非線形が重要



$$F = kx \cdots ①$$

$$F = kx + ax^3 \cdots ②$$

$a > 0$　　火に油そ注ぐ→ハードばね

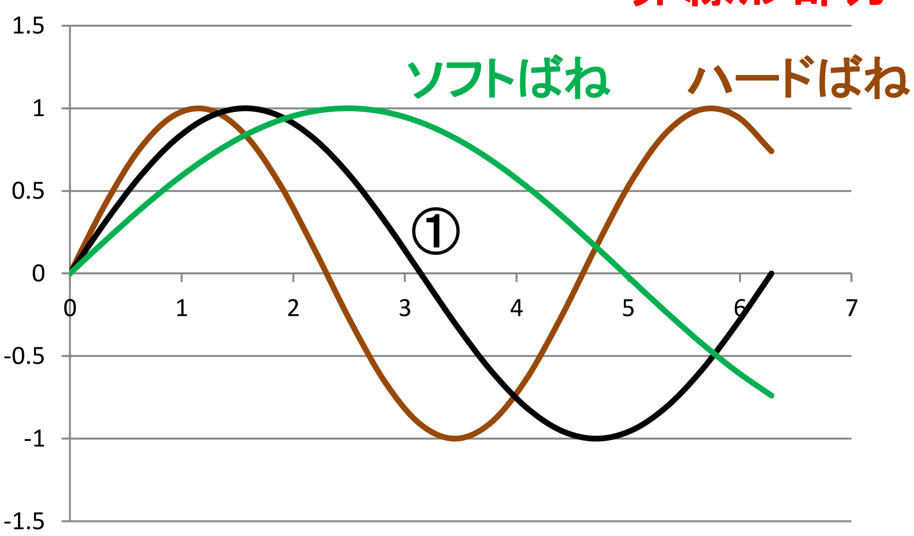
$a < 0$　　足を引っ張る→ソフトばね

x^2の項はプラスなので考えない

$$F = m \cdot \alpha = m\frac{d^2x}{dt^2} = -ka - ax^3$$

ダフィング方程式

非線形部分では固有振動数がズレル



ハードばねの方が振動数が大きく

振幅が大きいほど更に振動数大きく

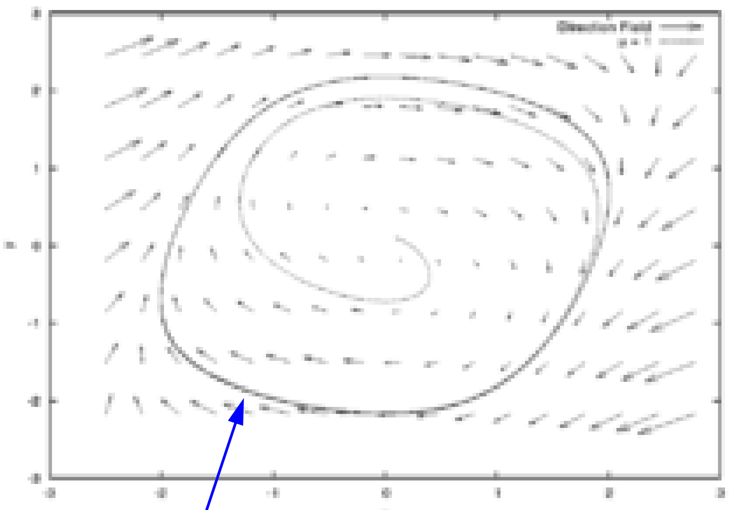
$$\omega = 1 + \frac{3}{8}aA^2$$

非線形の方程式

速度

$$m\cdot\frac{d^2x}{dt^2}=-kx+\underbrace{a\boxed{\frac{dx}{dt}}}_{\text{火に油}}\underbrace{-ax^2\boxed{\frac{dx}{dt}}}_{\text{足を引っ張る}}$$

ファンデルポール方程式

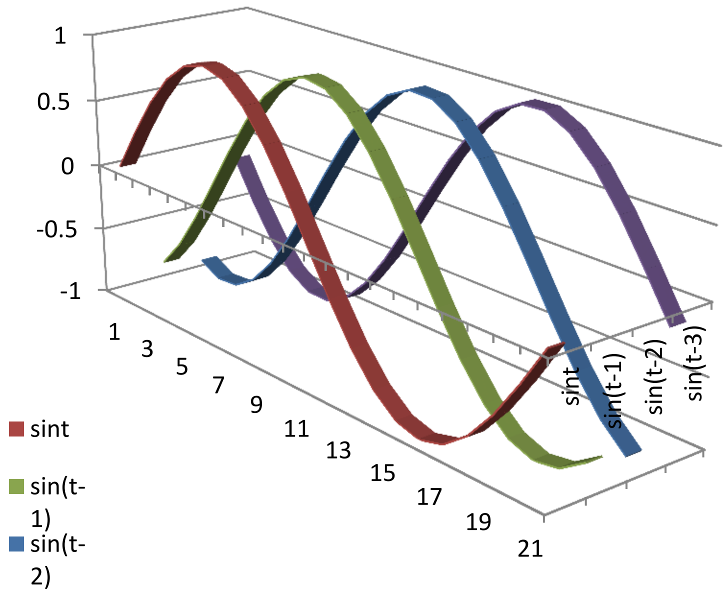


リミットサイクルは非線形系でのみ現れる。リミットサイクルの十分近くの軌道がすべてリミットサイクルに収束するとき、安定である

振動　同じ場所、時間的に変化
波　　振動が空間（場所）に伝わる

$u=\sin t$ 　　　　uは揺れ

$u=\sin(t-x)$



$$u=\underline{A}\sin(x-\underline{c}t)$$

振動　　光の速さ

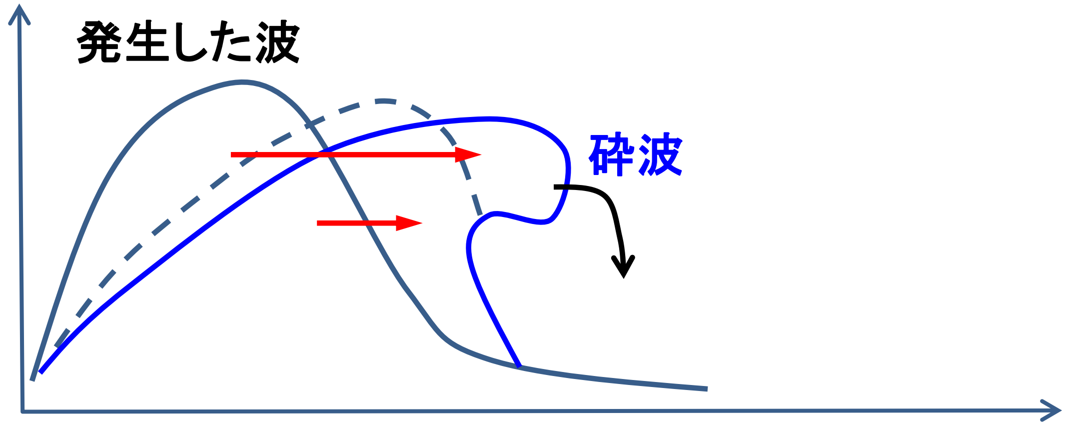
$$\frac{\partial u}{\partial t}=A\cos(x-ct)\times(-c)$$

$$=-cA\cos(x-ct)\cdots①$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=A\cos(x-ct)\cdots②$$

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t}=-c\frac{\partial u}{\partial x}}$$

波動方程式



$$\frac{\partial u}{\partial t} = -c\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \boxed{u\frac{\partial u}{\partial x}} = 0$$

cをuに置き換える

波の高さuが大きくなると波のスピード$\frac{\partial u}{\partial x}$が速くなる

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

衝撃波（拡散、熱伝導でエネルギー逃げる）

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$$

津波（エネルギー溜ったまま）

原理・原則を用いて
「アタリ」をつける
↓
仕事に活かす
課題を解決