

# ベイズの定理は、結果から原因の確率を推測できる

事前確率

$\Pr(A)$

原因A

$\Pr(B)$

原因B

$\Pr(C)$

原因C

条件付き  
確率

$\Pr(\text{結果O}/\text{原因A})$

$\Pr(\text{結果O}/\text{原因B})$

$\Pr(\text{結果O}/\text{原因C})$

結果O

事後確率

$\Pr(\text{原因A}/\text{結果O})$

$\Pr(\text{原因B}/\text{結果O})$

$\Pr(\text{原因C}/\text{結果O})$

$\Pr(\text{原因B}/\text{結果O})$

$\Pr(B) \times \Pr(\text{結果O}/\text{原因B})$

$$= \frac{\Pr(B) \times \Pr(\text{結果O}/\text{原因B})}{\Pr(A) \times \Pr(\text{結果O}/\text{原因A}) + \Pr(B) \times \Pr(\text{結果O}/\text{原因B}) + \Pr(C) \times \Pr(\text{結果O}/\text{原因C})}$$

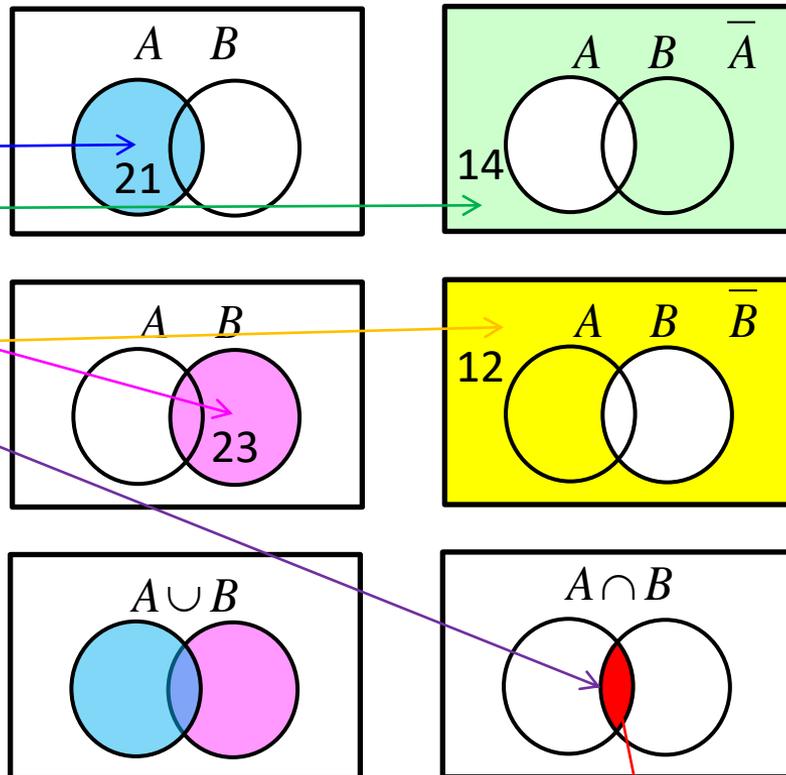
昔、ペストが流行した。

高熱を出した幼児の内、ペストが原因の確率はどのくらい？

	ペストで死亡した幼児の数	ペスト以外で死亡した幼児の数	合計
高熱が出た	17人	6人	23
高熱が出なかった	4人	8人	12
合計	21	14	35

- ペストで死亡した出来事
- ペスト以外で死亡した出来事
- 高熱が出た出来事
- 高熱が出なかった出来事
- ペストと高熱で死亡した出来事

- $A$
- $\bar{A}$
- $B$
- $\bar{B}$
- $A \cap B$



ペストで死亡する確率  $\Pr(A) = \Pr(\text{ペスト}) = \frac{21}{35} = \Pr(\text{原因}A)$

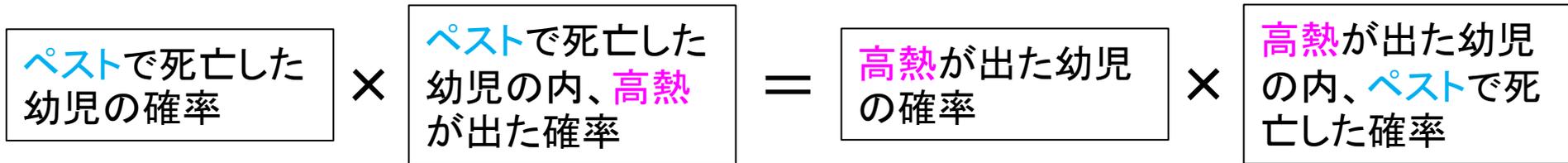
高熱が出る確率  $\Pr(B) = \Pr(\text{高熱}) = \frac{23}{35} = \Pr(\text{結果}B)$

$\Pr(\text{高熱} / \text{ペスト}) = \Pr(\text{結果}B / \text{原因}A) = \frac{17}{21}$

$\Pr(\text{ペスト} / \text{高熱}) = \Pr(\text{結果}A / \text{原因}B) = \frac{17}{23}$

	ペストで死亡した幼児の数 <b>A</b>	ペスト以外で死亡した幼児の数	合計
高熱が出た <b>B</b>	17人	6人	23
高熱が出なかった	4人	8人	12
合計	21	14	35

$$\frac{21}{35} \times \frac{17}{21} = \frac{17}{35} = \frac{23}{35} \times \frac{17}{23}$$



$$\Pr(\text{原因A}) \times \Pr(\text{結果B}/\text{原因A}) = \Pr(\text{結果B}) \times \Pr(\text{原因A}/\text{結果B})$$

$$\Pr(\text{結果B}/\text{原因A}) = \frac{\Pr(\text{結果B}) \times \Pr(\text{原因A}/\text{結果B})}{\Pr(\text{原因A})}$$

## 事後確率

$$\Pr(\text{原因A}/\text{結果B}) = \frac{\Pr(\text{原因A}) \times \Pr(\text{結果B}/\text{原因A})}{\Pr(\text{結果B})}$$

$$= \frac{\frac{21}{35} \times \frac{17}{21}}{\frac{23}{35}} = \frac{17}{23}$$

結果が**B**の時、原因が**A**である確率がわかる

	原因A	原因 $\bar{A}$	合計
結果B	a	b	a+b
結果 $\bar{B}$	c	d	c+d
合計	a+c	b+d	a+b+c+d

結果がBとなるときの原因がAである確率

$$\Pr(\text{原因A}/\text{結果B}) = \frac{\Pr(\text{原因A}) \times \Pr(\text{結果B}/\text{原因A})}{\Pr(\text{結果B})}$$

$$= \frac{\frac{a+c}{a+b+c+d} \times \frac{a}{a+c}}{\frac{a+b}{a+b+c+d}}$$

	$A_1$	$A_2$	$A_3$	合計
$B$	2	4	6	12
$\bar{B}$	3	5	7	15
合計	5	9	13	27

## ベイズの定理

$$\Pr(A_1/B) = \frac{\Pr(B/A_1) \times \Pr(A_1)}{\Pr(B/A_1) \times \Pr(A_1) + \Pr(B/A_2) \times \Pr(A_2) + \Pr(B/A_3) \times \Pr(A_3)}$$

$$\Pr(A_2/B) = \frac{\Pr(B/A_2) \times \Pr(A_2)}{\Pr(B/A_1) \times \Pr(A_1) + \Pr(B/A_2) \times \Pr(A_2) + \Pr(B/A_3) \times \Pr(A_3)}$$

$$\Pr(A_3/B) = \frac{\Pr(B/A_3) \times \Pr(A_3)}{\Pr(B/A_1) \times \Pr(A_1) + \Pr(B/A_2) \times \Pr(A_2) + \Pr(B/A_3) \times \Pr(A_3)}$$

$$\Pr(A_1/B) = \frac{\Pr(B/A_1) \times \Pr(A_1)}{\Pr(B/A_1) \times \Pr(A_1) + \Pr(B/A_2) \times \Pr(A_2) + \Pr(B/A_3) \times \Pr(A_3)}$$

結果 $B$ の原因 $A_1$ の  
確率

$$\frac{2}{12} = \frac{\frac{2}{5} \times \frac{5}{27}}{\frac{2}{5} \times \frac{5}{27} + \frac{4}{9} \times \frac{9}{27} + \frac{6}{13} \times \frac{13}{27}}$$