

ベイズ統計

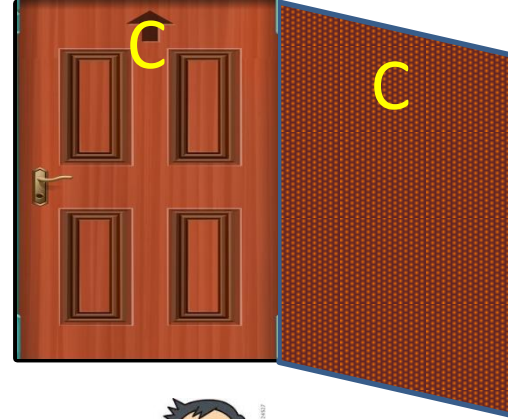
結果より原因の確率を予測する

従来の統計

収集データより将来の結果を推定する

モンティ・ホール問題

ドアの向こうには1台の車と2匹のヤギが隠れています。

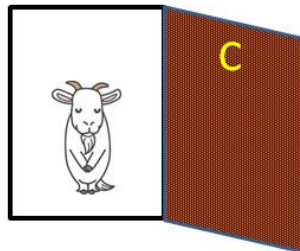


司会者：「車が隠れているドアを指さしてください。ヤギならはずれです。」

参加者：ドアAを指さしました。

司会者：ドアCを開けると、ヤギがいました。「あなたにもう一度チャンスを差し上げます。さあ、あなたはドアAとドアBのどちらを開けますか？Aのままですか？それともBに替えますか？」

Q. 開けるドアを変えた方がよいか？ 変えた方がよいか？



Car

原因AC ドアAの後ろに車

原因BC ドアBの後ろに車

原因CC ドアCの後ろに車

Open

結果OA 司会者がドアAを開ける

結果OB 司会者がドアBを開ける

結果OC 司会者がドアCを開ける

参加者がドアAを変えない場合

$\Pr(\text{ドア A の後ろに車/司会者がドア C を開ける})$

$= \Pr(\text{原因AC/結果OC})$

$$= \frac{\Pr(\text{結果OC/原因AC}) \times \Pr(\text{原因AC})}{\Pr(\text{結果OC/原因AC}) \times \Pr(\text{原因AC}) + \Pr(\text{結果OC/原因BC}) \times \Pr(\text{原因BC}) + \Pr(\text{結果OC/原因CC}) \times \Pr(\text{原因CC})}$$

参加者がドアAをドアBに変える場合

$\Pr(\text{ドア B の後ろに車/司会者がドア C を開ける})$

$= \Pr(\text{原因BC/結果OC})$

$$= \frac{\Pr(\text{結果OC/原因BC}) \times \Pr(\text{原因BC})}{\Pr(\text{結果OC/原因AC}) \times \Pr(\text{原因AC}) + \Pr(\text{結果OC/原因BC}) \times \Pr(\text{原因BC}) + \Pr(\text{結果OC/原因CC}) \times \Pr(\text{原因CC})}$$

3つの事前確率

$$\begin{aligned} \Pr(\text{原因AC}) &= \Pr(\text{ドア A の後ろに車}) = \frac{1}{3} \\ \Pr(\text{原因BC}) &= \Pr(\text{ドア B の後ろに車}) = \frac{1}{3} \\ \Pr(\text{原因CC}) &= \Pr(\text{ドア C の後ろに車}) = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

3つの条件付確率 尤度

参加者がドアAを指さし、ドアAの後ろに車、ドアBとCの後ろにはヤギなので
司会者は、ドアBとドアCのどちらを開けてもよい。つまり

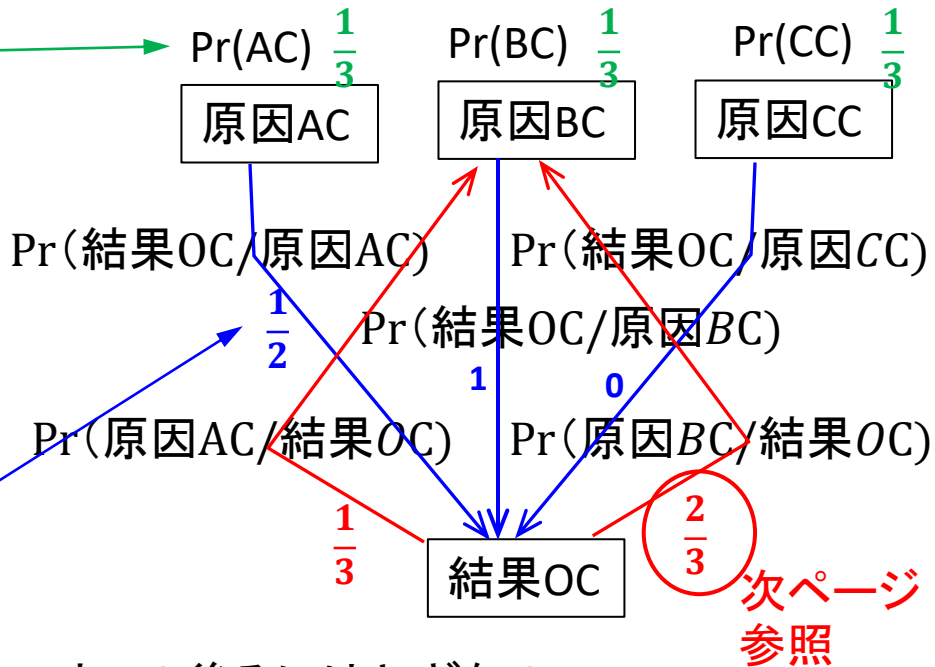
$$\begin{aligned} \Pr(\text{結果OC}/\text{原因AC}) &= \Pr(\text{司会者がドア C を開ける}/\text{ドア A の後ろに車}) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

参加者がドアAを指さし、ドアBの後ろに車のとき、司会者は必ずドアCを開けます

$$\begin{aligned} \Pr(\text{結果OC}/\text{原因BC}) &= \Pr(\text{司会者がドア C を開ける}/\text{ドア B の後ろに車}) \\ &= 1 \end{aligned}$$

参加者がドアAを指さし、ドアCの後ろに車のとき、司会者はドアCを開けない

$$\begin{aligned} \Pr(\text{結果OC}/\text{原因CC}) &= \Pr(\text{司会者がドア C を開ける}/\text{ドア C の後ろに車}) \\ &= 0 \end{aligned}$$



事後確率

参加者がドアAを**変えない**場合

$\Pr(\text{ドア A の後ろに車/司会者がドア C を開ける})$

$$= \Pr(\text{原因AC/結果OC})$$

$$= \frac{\Pr(\text{結果OC/原因AC}) \times \Pr(\text{原因AC})}{\Pr(\text{結果OC/原因AC}) \times \Pr(\text{原因AC}) + \Pr(\text{結果OC/原因BC}) \times \Pr(\text{原因BC}) + \Pr(\text{結果OC/原因CC}) \times \Pr(\text{原因CC})}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$$

参加者がドアAをドアBに**変える**場合

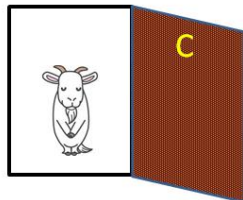
$\Pr(\text{ドア B の後ろに車/司会者がドア C を開ける})$

$$= \Pr(\text{原因BC/結果OC})$$

$$= \frac{\Pr(\text{結果OC/原因BC}) \times \Pr(\text{原因BC})}{\Pr(\text{結果OC/原因AC}) \times \Pr(\text{原因AC}) + \Pr(\text{結果OC/原因BC}) \times \Pr(\text{原因BC}) + \Pr(\text{結果OC/原因CC}) \times \Pr(\text{原因CC})}$$

$$= \frac{1 \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{3}} = \frac{2}{3}$$

司会者がドアCを開けることにより
ドアBに**変える方が有利**になる



	A		B	C
車	$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
参加者	A		A	A
司会者	B	C	C	B
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1
ここまでの確率	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
扉変える	×	×	○	○
変えない	○	○	×	×
車を当てる確率	$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{3}$	

Excelを用いてモンティ・ホールの変更の正解率をシミュレーション

