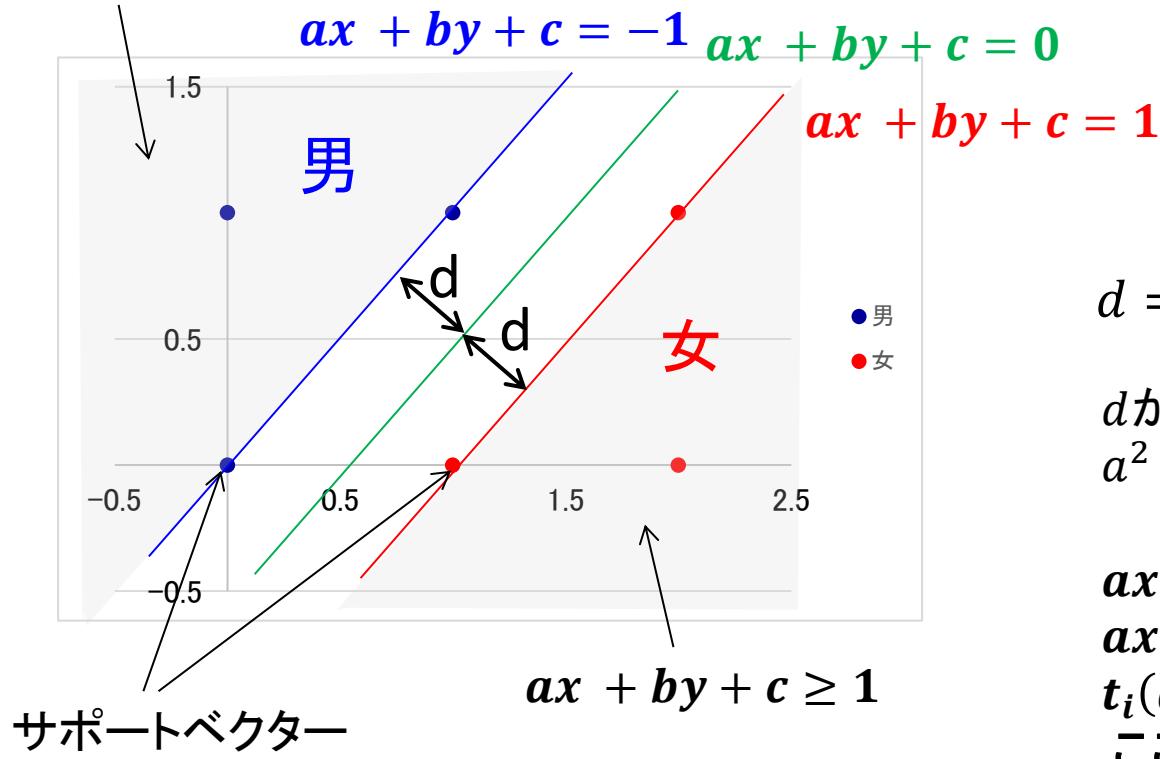


サポートベクターマシン(SVM)

マージン(d)を最大化して識別関数を求める

$$ax + by + c \leq -1$$



$$d = \frac{|ax_i + b_i + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

d が最大になるのは、
 $a^2 + b^2$ が最小のとき

$ax_i + by_i + c \leq -1$ と
 $ax_i + by_i + c \geq 1$ を合わせて
 $t_i(ax_i + by_i + c) \geq 1$
ここで、 $t_i = 1$ あるいは -1

$$d = \frac{|ax_i + b_i + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

dが最大になるのは、 $a^2 + b^2$ が最小のとき

$ax_i + by_i + c \leq -1$ と $ax_i + by_i + c \geq 1$ を合わせて、 $t_i(ax_i + by_i + c) \geq 1$
ここで、 $t_i = 1$ あるいは -1

$t_i(ax_i + by_i + c) \geq 1$ と $a^2 + b^2$ が最小になる a, b, c を求める

 ひとつの式で表す → ラグランジュの緩和法 双対問題

$$L = \frac{1}{2}(a^2 + b^2) + \mu_1\{1 - t_1(ax_1 + by_1 + c)\} + \mu_2\{1 - t_2(ax_2 + by_2 + c)\} + \dots \dots \\ + \mu_6\{1 - t_6(ax_6 + by_6 + c)\}$$

L の最小値は

$$\frac{\partial L}{\partial a} = a - \mu_1 t_1 x_1 - \mu_2 t_2 x_2 - \dots \dots - \mu_6 t_6 x_6 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial b} = b - \mu_1 t_1 x_1 - \mu_2 t_2 x_2 - \dots \dots - \mu_6 t_6 x_6 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial c} = -\mu_1 t_1 - \mu_2 t_2 - \dots \dots - \mu_6 t_6 = 0$$

$$a = \mu_1 t_1 x_1 - \mu_2 t_2 x_2 - \dots \dots - \mu_6 t_6 x_6$$

$$b = \mu_1 t_1 x_1 - \mu_2 t_2 x_2 - \dots \dots - \mu_6 t_6 x_6$$

$$\mu_1 t_1 - \mu_2 t_2 - \dots \dots - \mu_6 t_6 = 0$$

$$L = \frac{1}{2}(a^2 + b^2) - a(\mu_1 t_1 x_1 + \mu_2 t_2 x_2 + \dots \dots + \mu_6 t_6 x_6) - b(\mu_1 t_1 x_1 + \mu_2 t_2 x_2 + \dots \dots + \mu_6 t_6 x_6) \\ + (\mu_1 + \mu_2 + \dots \dots + \mu_6) \\ = \frac{1}{2}(a^2 + b^2) - a(a) - b(b) + (\mu_1 + \mu_2 + \dots \dots + \mu_6) \\ = -\frac{1}{2}(a^2 + b^2) + (\mu_1 + \mu_2 + \dots \dots + \mu_6)$$

$$\begin{aligned}
 a^2 &= (\mu_1 t_1 x_1 - \mu_2 t_2 x_2 - \dots - \mu_6 t_6 x_6)^2 \\
 &= \mu_1 \mu_1 t_1 t_1 x_1 x_1 + \mu_1 \mu_2 t_1 t_2 x_1 x_2 + \mu_1 \mu_3 t_1 t_3 x_1 x_3 + \dots + \mu_6 \mu_6 t_6 t_6 x_6 x_6 \\
 b^2 &= (\mu_1 t_1 y_1 - \mu_2 t_2 y_2 - \dots - \mu_6 t_6 y_6)^2 \\
 &= \mu_1 \mu_1 t_1 t_1 y_1 y_1 + \mu_1 \mu_2 t_1 t_2 y_1 y_2 + \mu_1 \mu_3 t_1 t_3 y_1 y_3 + \dots + \mu_6 \mu_6 t_6 t_6 y_6 y_6
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L &= -\frac{1}{2}(\textcolor{red}{a^2} + \textcolor{blue}{b^2}) + (\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_6) \\
 &= -\frac{1}{2}\{\mu_1 \mu_1 t_1 t_1 (x_1 x_1 + y_1 y_1) + \mu_1 \mu_2 t_1 t_2 (x_1 x_2 + y_1 y_2) + \dots + \mu_6 \mu_6 t_6 t_6 (x_6 x_6 + y_6 y_6)\} \\
 &\quad + (\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_6)
 \end{aligned}$$

$\textcolor{red}{a^2} + \textcolor{blue}{b^2}$ が最小ということは、 μ_i が正のとき、 L の最大値を求ることになる

$$\begin{aligned}
 L &= -\frac{1}{2}\{\mu_1 \mu_1 t_1 t_1 (x_1 x_1 + y_1 y_1) + \mu_1 \mu_2 t_1 t_2 (x_1 x_2 + y_1 y_2) + \dots + \mu_6 \mu_6 t_6 t_6 (x_6 x_6 + y_6 y_6)\} \\
 &\quad + (\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_6)
 \end{aligned}$$

$$\mu_1 t_1 - \mu_2 t_2 - \dots - \mu_6 t_6 = 0$$

実行結果

	No.	x	y	t
負	A	1	0	0
	B	2	0	1
	C	3	1	1
正	D	4	1	0
	E	5	2	0
	F	6	2	1

μ	値
μ_1	1.000
μ_2	4.000
μ_3	1.000
μ_4	4.000
μ_5	2.000
μ_6	1.000

条件	
$\sum t_i \mu_i$	1.000
L	-35.5
a	
b	

μ	値	条件	
μ_1	1.647	$\sum t_i \mu_i$	0.000
μ_2	0.000	L	4.0000001
μ_3	2.353	a	
μ_4	3.647	b	
μ_5	0.000		
μ_6	0.353		

	x1	x2	x3	x4	x5	x6
x1	0	0	1	1	2	2
x2	0	0	0	0	0	0
x3	1	0	0	1	1	2
x4	1	0	0	1	1	2
x5	2	0	0	2	2	4
x6	2	0	0	2	2	4

	v1	v2	v3	v4	v5	v6
y1	0	1	1	0	0	1
y2	0	0	0	0	0	0
y3	1	0	1	1	0	1
y4	0	0	0	0	0	0
y5	0	0	0	0	0	0
y6	1	0	1	1	0	1

	t1	t2	t3	t4	t5	t6
t1	-1	-1	-1	1	1	1
t2	-1	1	1	1	-1	-1
t3	-1	1	1	1	-1	-1
t4	1	-1	-1	-1	1	1
t5	1	-1	-1	-1	1	1
t6	1	-1	-1	-1	1	1

	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6
μ_1	1.000	4.000	1.000	4.000	2.000	1.000
μ_2	4.000	4.000	16.000	4.000	16.000	8.000
μ_3	1.000	1.000	4.000	1.000	4.000	2.000
μ_4	4.000	4.000	16.000	4.000	16.000	8.000
μ_5	2.000	2.000	8.000	2.000	8.000	4.000
μ_6	1.000	1.000	4.000	1.000	4.000	1.000

$$\mu_1 t_1 - \mu_2 t_2 - \dots - \mu_6 t_6 = 0$$

実行結果

ソルバー: パラメータ設定

目的セル(E):

\$L\$5

目標値: 最大値(M) 最小値(N) 値(V): 0

変化させるセル(B):

\$I\$3:\$I\$8

制約条件(U)

\$L\$3 = 0

自動(G)

追加(A)

変更(Q)

削除(D)

実行(S)

閉じる

オプション(O)

リセット(R)

ヘルプ(H)

$$L = -\frac{1}{2} (\mu_1 \mu_1 t_1 t_1 [x_1 x_1] + y_1 y_1) + (\mu_1 \mu_2 t_1 t_2 [x_1 x_2] + y_1 y_2) + \dots + (\mu_6 \mu_6 t_6 t_6 [x_6 x_6] + y_6 y_6)$$

$$+ (\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_6)$$

No.	1	2	3	4	5	6
1	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
3	0.000	0.000	11.069	-8.581	0.000	-2.488
4	0.000	0.000	-8.581	13.304	0.000	2.572
5	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
6	0.000	0.000	-2.488	2.572	0.000	0.621

実行結果

μ	値	条件	
μ_1	1.647	$\sum t_i \mu_i$	0.000
μ_2	0.000		
μ_3	2.353	L	4.000001
μ_4	3.647		
μ_5	0.000	a	b
μ_6	0.353	2.000	-2.000

$$a = \mu_1 t_1 x_1 - \mu_2 t_2 x_2 - \dots - \mu_6 t_6 x_6$$

$$b = \mu_1 t_1 x_1 - \mu_2 t_2 x_2 - \dots - \mu_6 t_6 x_6$$

負の場合

$$ax + by + c = -1 \text{より } c = -1 - (ax + by)$$

正の場合

$$ax + by + c = 1 \text{より } c = 1 - (ax + by)$$



	No.	x	y	類別	正負(t)	μ	SV	c
負	A	1	0	男	-1	1.647	YES	-1
	B	2	0	男	-1	0.000	NO	
	C	3	1	男	-1	2.353	YES	-1
正	D	4	1	女	1	3.647	YES	-1
	E	5	2	女	1	0.000	NO	
	F	6	2	女	1	0.353	YES	-1

