

固有値の算出方法

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

とおくと

$$AX = \lambda X$$

$$\lambda X - AX = 0$$

$$(\lambda E - A)X = 0$$

上式を満足するには

$$\text{行列式 } |\lambda E - A| = 0$$

$$E \text{ は単位行列で } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

行列Aの固有値を算出してみます

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda E = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \lambda E - A &= \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ -4 & \lambda - 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$|\lambda E - A| = (\lambda - 3)(\lambda - 1) - 8 = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$$

$$(\lambda + 1)(\lambda - 5) = 0$$

固有値 λ は、 -1 と 5

$(\lambda E - A)X = 0$ の固有ベクトル算出

固有値 $\lambda = 5$ のとき

$$\left(\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \right) X = 0$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} X = 0$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ -4x + 4y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = c \\ y = c \end{cases} \text{ とおく}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

固有ベクトル

固有値 $\lambda = -1$ のとき

$$\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \right) X = 0$$

$$\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} X = 0$$

$$\begin{bmatrix} -4 & -2 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -4x - 2y = 0 \\ -4x - 2y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + \frac{1}{2}y = 0 \\ x + \frac{1}{2}y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2}c \\ y = c \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}c \\ c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

