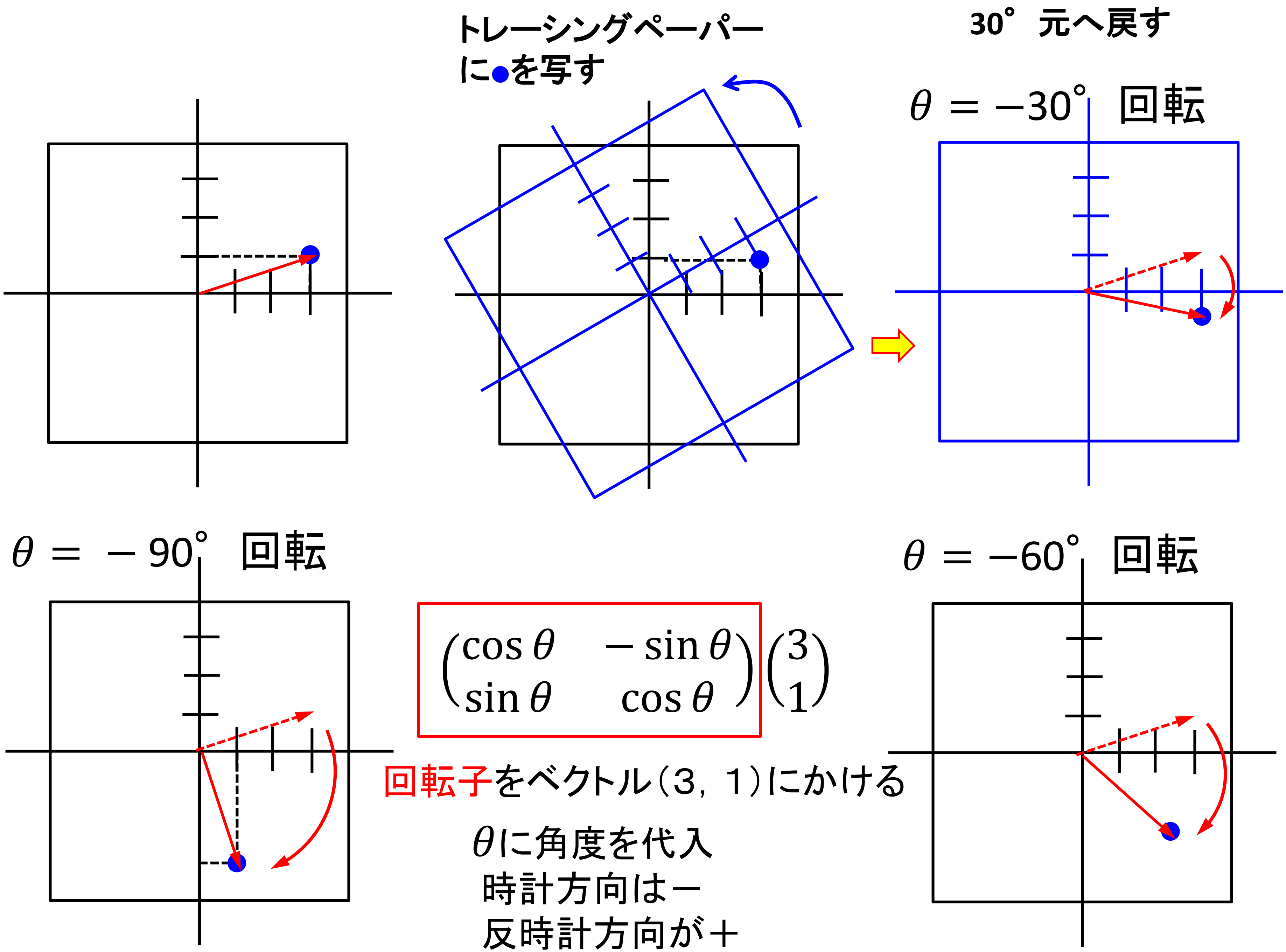

トレーシングペーパー
に●を写す
30° 元へ戻す
θ = −30° 回転
θ = − 90° 回転
θ = −60° 回転
$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$
回転子をベクトル（3，1）にかける
θに角度を代入
時計方向は－
反時計方向が＋

$\theta = -30°$　を代入すると $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 、$\sin\theta = -\frac{1}{2}$

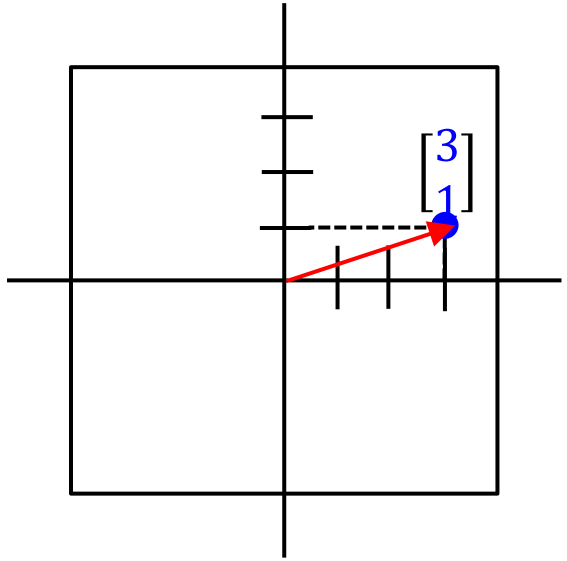
$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

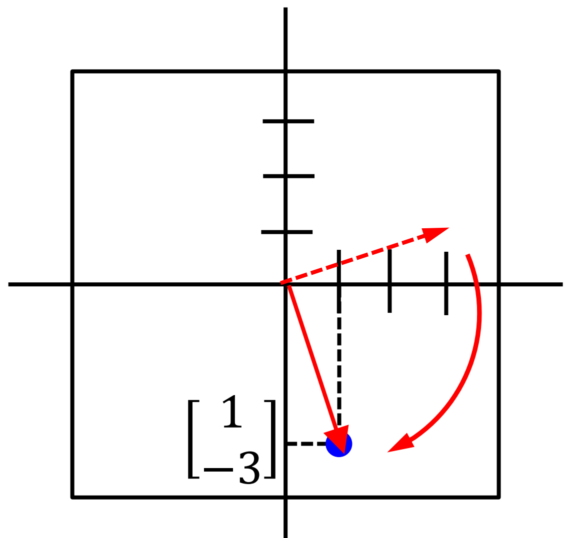
ベクトル（3，1）に1回、2回及び3回かける

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1+3\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-3+\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1+3\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-3+\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3+\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1-3\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3+\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1-3\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$





対角化

$$
\begin{bmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} y_1 & 0 & 0 \\ 0 & y_2 & 0 \\ 0 & 0 & y_3 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} x_1 y_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 y_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 y_3 \end{bmatrix}
$$

対角行列

$$A = P\Lambda P^{-1}$$

$$
\begin{aligned}
A^n &= P\Lambda \boxed{P^{-1}\cdot P} \Lambda \boxed{P^{-1}\cdot P} \Lambda \boxed{P^{-1}\cdot P} \Lambda \boxed{P^{-1}\cdots} \boxed{\cdots P} \Lambda P^{-1} \\
&= P\Lambda^n P^{-1}
\end{aligned}
$$

$$
\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}
$$

$$
\Lambda^n = \begin{bmatrix} {\lambda_1}^2 & 0 \\ 0 & {\lambda_2}^2 \end{bmatrix}
$$

λ: 固有値

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix} = A$$

$= \lambda_1$ 固有値

$$P = \begin{bmatrix}1 & 1\\ i & -i\end{bmatrix} \qquad \Lambda = \begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}+i}{2} & 0\\ 0 & \frac{\sqrt{3}-i}{2}\end{bmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{-i}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{i}{2}\end{bmatrix}$$

$= \lambda_2$

$$P\Lambda P^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 1\\ i & -i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}+i}{2} & 0\\ 0 & \frac{\sqrt{3}-i}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{-i}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{i}{2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix} = A$$

1回　回転

$$P\Lambda^2 P^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 1\\ i & -i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^2 & 0\\ 0 & \left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{-i}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{i}{2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix} = A^2$$

2回　回転

$$P\Lambda^3 P^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 1\\ i & -i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^3 & 0\\ 0 & \left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{-i}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{i}{2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix} = A^3$$

3回　回転

固有ベクトル

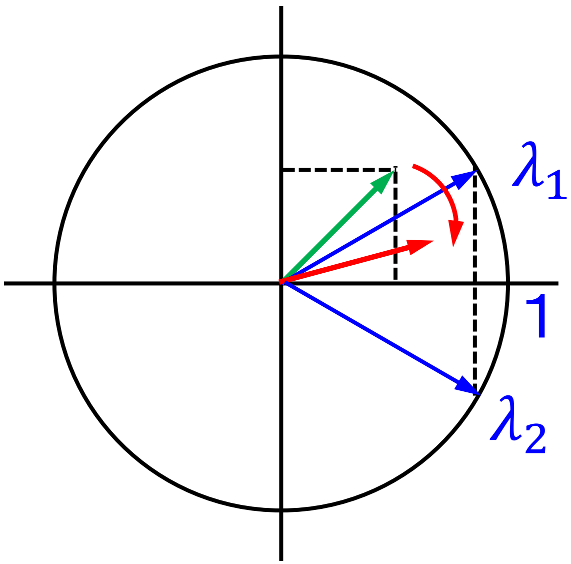
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

固有値

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{i}{2} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{3}+i}{2}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{i}{2} \end{pmatrix}$$

この行列は固有ベクトルを

−30°回転



固有値の絶対値(大きさ)は1

$$\left|\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right| = 1$$

もう一つの固有値の絶対値も1

$$\left|\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right| = 1$$

行列のイメージ

（再掲）

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

plt.figure()
a = 2
b = 0
c = 0
d = 2

for i in range(-10,11,5):
    for j in range(-10,11,5):
        x = i
        y = j
        u = a*x+b*y-x
        v = c*x+d*y-y
        print(x,y,u+x,v+y)
        plt.quiver(x,y,u,v,width=0.003,angles='xy',scale_units='xy',scale=1)
plt.xlim([-30,30])
plt.ylim([-30,30])
plt.grid()
plt.draw()
plt.show()
```

行列×ベクトル ＝ ベクトル

$$\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\times x+0\times y\\0\times x+2\times y\end{pmatrix}$$

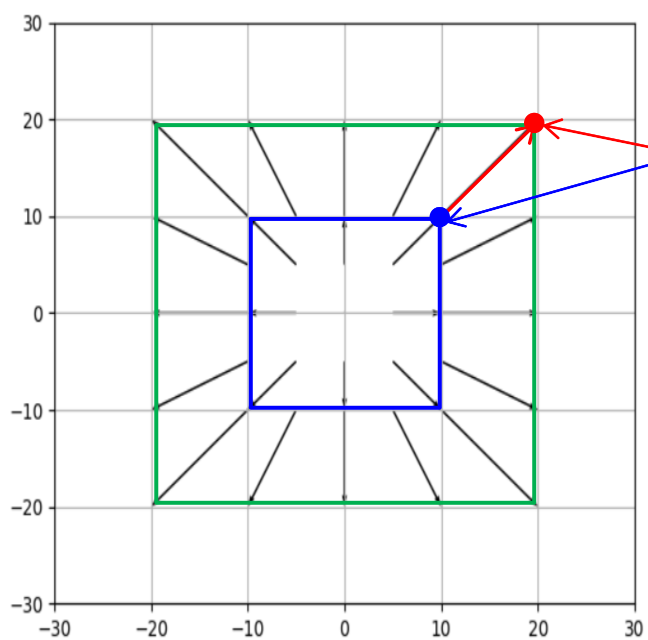
固有ベクトル

$$\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}\boxed{\begin{pmatrix}10\\10\end{pmatrix}}=\begin{pmatrix}20\\20\end{pmatrix}=2\boxed{\begin{pmatrix}10\\10\end{pmatrix}}$$

固有値

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$には青枠の中の座標を入れます

例えばこの点は、$\begin{pmatrix}10\\10\end{pmatrix}$です



行列$\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$を掛けて得られた

ベクトルの終点の座標は$\begin{pmatrix}20\\20\end{pmatrix}$です

行列$\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$を掛けると青枠から

緑枠のように2倍に拡がります