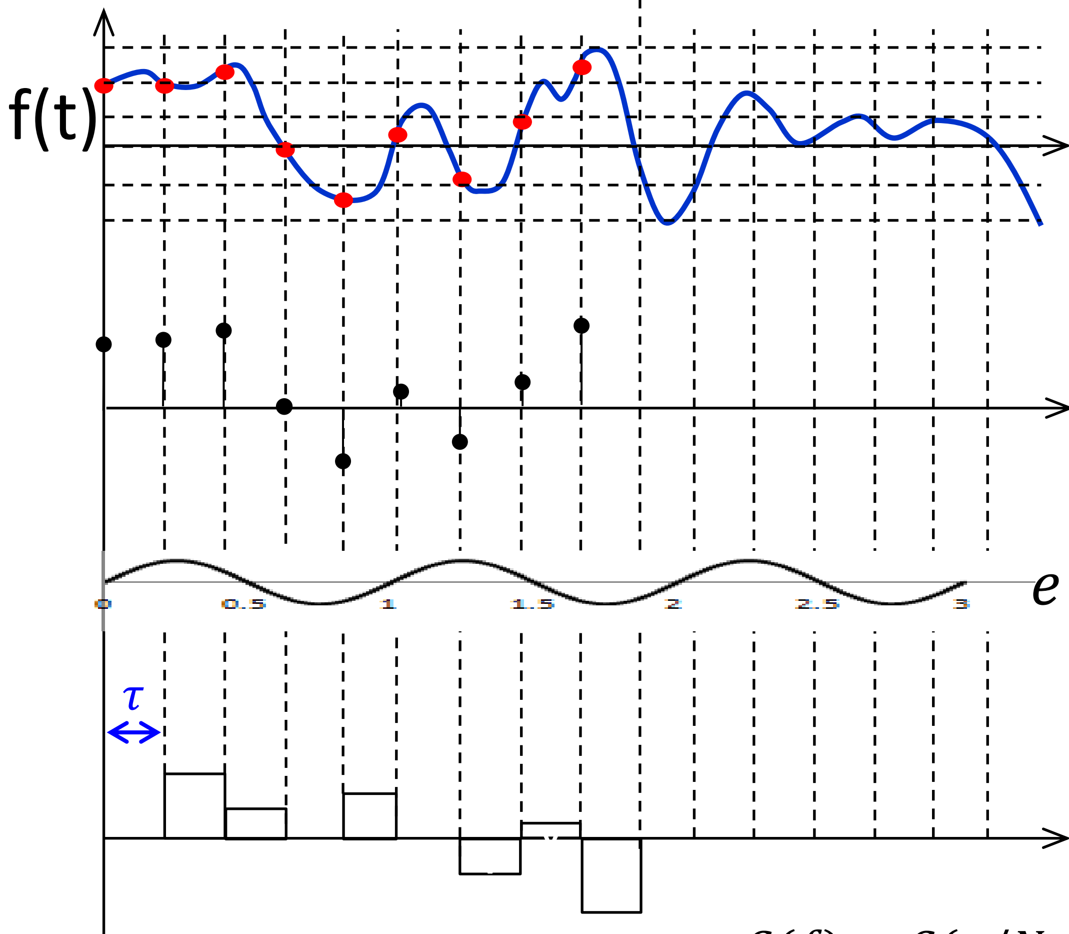
$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i2\pi f t}\, dt$$

フーリエ変換

f(0)	f(1)	f(2)	f(3)	f(4)	f(5)	f(6)	f(7)	f(8)	・・・・
2	2	2.3	0	-1.4	0.4	-0.8	0.9	2.4	・・・・



基本周波数$f = \frac{1}{\text{周期}T} = \frac{1}{N\tau}$

周波数は基本周波数の
1、2、3・・・n倍

$$e^{-i2\pi f k\tau} = e^{-i2\pi kn/N}$$

$$G(f) = G(n/N\tau) = \sum_{k=0}^{N-1} \tau \cdot f(k\tau) e^{-i2\pi kn/N}$$

$$G(f) = G(n/N\tau) = \sum_{k=0}^{N-1} \tau \cdot f(k\tau) e^{-i2\pi kn/N}$$

τ =1秒とする

$$G(n/N) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) e^{-i2\pi kn/N}$$

$e^{-i2\pi/N} = W$とおく

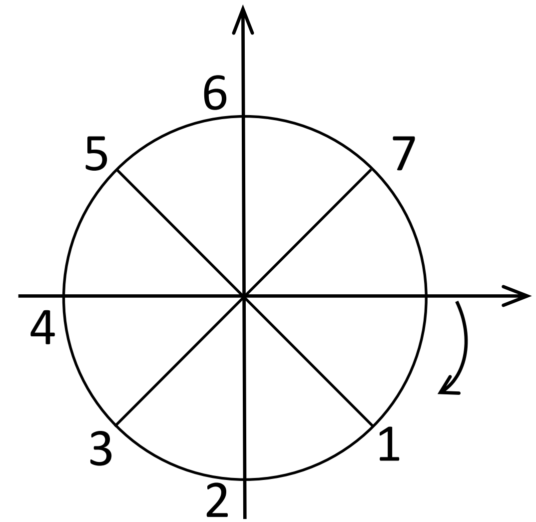
$$G(n/N) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) W^{nk}$$

N=8とすると

$$G_{(0|8)} = f_{(0)}W^0 + f_{(1)}W^0 + f_{(2)}W^0 + f_{(3)}W^0 + f_{(4)}W^0 + f_{(5)}W^0 + f_{(6)}W^0 + f_{(7)}W^0$$
$$G_{(1|8)} = f_{(0)}W^0 + f_{(1)}W^1 + f_{(2)}W^2 + f_{(3)}W^3 + f_{(4)}W^4 + f_{(5)}W^5 + f_{(6)}W^6 + f_{(7)}W^7$$
$$G_{(2|8)} = f_{(0)}W^0 + f_{(1)}W^2 + f_{(2)}W^4 + f_{(3)}W^6 + f_{(4)}W^8 + f_{(5)}W^{10} + f_{(6)}W^{12} + f_{(7)}W^{14}$$
$$G_{(3|8)} = f_{(0)}W^0 + f_{(1)}W^3 + f_{(2)}W^6 + f_{(3)}W^9 + f_{(4)}W^{12} + f_{(5)}W^{15} + f_{(6)}W^{18} + f_{(7)}W^{21}$$
$$G_{(4|8)} = f_{(0)}W^0 + f_{(1)}W^4 + f_{(2)}W^8 + f_{(3)}W^{12} + f_{(4)}W^{16} + f_{(5)}W^{20} + f_{(6)}W^{24} + f_{(7)}W^{28}$$
$$G_{(5|8)} = f_{(0)}W^0 + f_{(1)}W^5 + f_{(2)}W^{10} + f_{(3)}W^{15} + f_{(4)}W^{20} + f_{(5)}W^{25} + f_{(6)}W^{30} + f_{(7)}W^{35}$$
$$G_{(6|8)} = f_{(0)}W^0 + f_{(1)}W^6 + f_{(2)}W^{12} + f_{(3)}W^{18} + f_{(4)}W^{24} + f_{(5)}W^{30} + f_{(6)}W^{36} + f_{(7)}W^{42}$$
$$G_{(7|8)} = f_{(0)}W^0 + f_{(1)}W^7 + f_{(2)}W^{14} + f_{(3)}W^{21} + f_{(4)}W^{28} + f_{(5)}W^{35} + f_{(6)}W^{42} + f_{(7)}W^{49}$$

	$f_{(0)}$	$f_{(1)}$	$f_{(2)}$	$f_{(3)}$	$f_{(4)}$	$f_{(5)}$	$f_{(6)}$	$f_{(7)}$
$G_{(0\|8)}$	W^0	W^0	W^0	W^0	W^0	W^0	W^0	W^0
$G_{(1\|8)}$	W^0	W^1	W^2	W^3	W^4	W^5	W^6	W^7
$G_{(2\|8)}$	W^0	W^2	W^4	W^6	W^8	W^{10}	W^{12}	W^{14}
$G_{(3\|8)}$	W^0	W^3	W^6	W^9	W^{12}	W^{15}	W^{18}	W^{21}
$G_{(4\|8)}$	W^0	W^4	W^8	W^{12}	W^{16}	W^{20}	W^{24}	W^{28}
$G_{(5\|8)}$	W^0	W^5	W^{10}	W^{15}	W^{20}	W^{25}	W^{30}	W^{35}
$G_{(6\|8)}$	W^0	W^6	W^{12}	W^{18}	W^{24}	W^{30}	W^{36}	W^{42}
$G_{(7\|8)}$	W^0	W^7	W^{14}	W^{21}	W^{28}	W^{35}	W^{42}	W^{49}

$$e^{-i2\pi/N} = W$$



N=8とすると、ちょうど1周するので

$W^0 = W^8$、$W^1 = W^9$、$W^2 = W^{10}$・・・

	$f_{(0)}$	$f_{(1)}$	$f_{(2)}$	$f_{(3)}$	$f_{(4)}$	$f_{(5)}$	$f_{(6)}$	$f_{(7)}$
$G_{(0\|8)}$	W^0	W^0	W^0	W^0	W^0	W^0	W^0	W^0
$G_{(1\|8)}$	W^0	W^1	W^2	W^3	W^4	W^5	W^6	W^7
$G_{(2\|8)}$	W^0	W^2	W^4	W^6	W^0	W^2	W^4	W^6
$G_{(3\|8)}$	W^0	W^3	W^6	W^1	W^4	W^7	W^2	W^5
$G_{(4\|8)}$	W^0	W^4	W^0	W^4	W^0	W^4	W^0	W^4
$G_{(5\|8)}$	W^0	W^5	W^2	W^7	W^4	W^1	W^6	W^3
$G_{(6\|8)}$	W^0	W^6	W^4	W^2	W^0	W^6	W^4	W^2
$G_{(7\|8)}$	W^0	W^7	W^6	W^5	W^4	W^3	W^2	W^1

偶数

W^{n2k}	$f_{(0)}$	$f_{(2)}$	$f_{(4)}$	$f_{(6)}$
$G_{(0\|8)}$	W^0	W^0	W^0	W^0
$G_{(1\|8)}$	W^0	W^2	W^4	W^6
$G_{(2\|8)}$	W^0	W^4	W^0	W^4
$G_{(3\|8)}$	W^0	W^6	W^4	W^2
$G_{(4\|8)}$	W^0	W^0	W^0	W^0
$G_{(5\|8)}$	W^0	W^2	W^4	W^6
$G_{(6\|8)}$	W^0	W^4	W^0	W^4
$G_{(7\|8)}$	W^0	W^6	W^4	W^2

同じ

奇数

$W^{n(2k+1)}$	$f_{(1)}$	$f_{(3)}$	$f_{(5)}$	$f_{(7)}$
$G_{(0\|8)}$	W^0	W^0	W^0	W^0
$G_{(1\|8)}$	W^1	W^3	W^5	W^7
$G_{(2\|8)}$	W^2	W^6	W^2	W^6
$G_{(3\|8)}$	W^3	W^1	W^7	W^5
$G_{(4\|8)}$	W^4	W^4	W^4	W^4
$G_{(5\|8)}$	W^5	W^7	W^1	W^3
$G_{(6\|8)}$	W^6	W^2	W^6	W^2
$G_{(7\|8)}$	W^7	W^5	W^3	W^1

同じ

W^n
W^0
W^1
W^2
W^3
W^4
W^5
W^6
W^7

×

W^{n2k}	$f_{(1)}$	$f_{(3)}$	$f_{(5)}$	$f_{(7)}$
$G_{(0\|8)}$	W^0	W^0	W^0	W^0
$G_{(1\|8)}$	W^0	W^2	W^4	W^6
$G_{(2\|8)}$	W^0	W^4	W^0	W^4
$G_{(3\|8)}$	W^0	W^6	W^4	W^2
$G_{(4\|8)}$	W^0	W^0	W^0	W^0
$G_{(5\|8)}$	W^0	W^2	W^4	W^6
$G_{(6\|8)}$	W^0	W^4	W^0	W^4
$G_{(7\|8)}$	W^0	W^6	W^4	W^2

W^{n2k}	$f_{(0)}$	$f_{(2)}$	$f_{(4)}$	$f_{(6)}$
$G_{(0\|8)}$	W^0	W^0	W^0	W^0
$G_{(1\|8)}$	W^0	W^2	W^4	W^6
$G_{(2\|8)}$	W^0	W^4	W^0	W^4
$G_{(3\|8)}$	W^0	W^6	W^4	W^2
$G_{(4\|8)}$	W^0	W^0	W^0	W^0
$G_{(5\|8)}$	W^0	W^2	W^4	W^6
$G_{(6\|8)}$	W^0	W^4	W^0	W^4
$G_{(7\|8)}$	W^0	W^6	W^4	W^2

W^n
W^0
W^1
W^2
W^3
W^4
W^5
W^6
W^7

×

W^{n2k}	$f_{(1)}$	$f_{(3)}$	$f_{(5)}$	$f_{(7)}$
$G_{(0\|8)}$	W^0	W^0	W^0	W^0
$G_{(1\|8)}$	W^0	W^2	W^4	W^6
$G_{(2\|8)}$	W^0	W^4	W^0	W^4
$G_{(3\|8)}$	W^0	W^6	W^4	W^2
$G_{(4\|8)}$	W^0	W^0	W^0	W^0
$G_{(5\|8)}$	W^0	W^2	W^4	W^6
$G_{(6\|8)}$	W^0	W^4	W^0	W^4
$G_{(7\|8)}$	W^0	W^6	W^4	W^2

$\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}$のあと$-W^n$

$\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}$のあと$-W^n$

W^{n2k}	$f_{(0)}$	$f_{(4)}$
$G_{(0\|8)}$	W^0	W^0
$G_{(1\|8)}$	W^0	W^2
$G_{(2\|8)}$	W^0	W^0
$G_{(3\|8)}$	W^0	W^2
$G_{(4\|8)}$	W^0	W^0
$G_{(5\|8)}$	W^0	W^2
$G_{(6\|8)}$	W^0	W^0
$G_{(7\|8)}$	W^0	W^2

W^n
W^0
W^1
W^2
W^3
W^4
W^5
W^6
W^7

×

W^{n2k}	$f_{(2)}$	$f_{(6)}$
$G_{(0\|8)}$	W^0	W^0
$G_{(1\|8)}$	W^0	W^2
$G_{(2\|8)}$	W^0	W^0
$G_{(3\|8)}$	W^0	W^2
$G_{(4\|8)}$	W^0	W^0
$G_{(5\|8)}$	W^0	W^2
$G_{(6\|8)}$	W^0	W^0
$G_{(7\|8)}$	W^0	W^2

W^n
W^0
W^1
W^2
W^3
W^4
W^5
W^6
W^7

×

W^{n2k}	$f_{(1)}$	$f_{(5)}$
$G_{(0\|8)}$	W^0	W^0
$G_{(1\|8)}$	W^0	W^2
$G_{(2\|8)}$	W^0	W^0
$G_{(3\|8)}$	W^0	W^2
$G_{(4\|8)}$	W^0	W^0
$G_{(5\|8)}$	W^0	W^2
$G_{(6\|8)}$	W^0	W^0
$G_{(7\|8)}$	W^0	W^2

W^n
W^0
W^1
W^2
W^3
W^4
W^5
W^6
W^7

×

W^{n2k}	$f_{(3)}$	$f_{(7)}$
$G_{(0\|8)}$	W^0	W^0
$G_{(1\|8)}$	W^0	W^2
$G_{(2\|8)}$	W^0	W^0
$G_{(3\|8)}$	W^0	W^2
$G_{(4\|8)}$	W^0	W^0
$G_{(5\|8)}$	W^0	W^2
$G_{(6\|8)}$	W^0	W^0
$G_{(7\|8)}$	W^0	W^2

同じ

W^{n2k}	$f_{(0)}$	$f_{(4)}$
$G_{(0\|8)}$	W^0	W^0
$G_{(1\|8)}$	W^0	W^2
$G_{(2\|8)}$	W^0	W^0
$G_{(3\|8)}$	W^0	W^2
$G_{(4\|8)}$	W^0	W^0
$G_{(5\|8)}$	W^0	W^2
$G_{(6\|8)}$	W^0	W^0
$G_{(7\|8)}$	W^0	W^2

W^n
W^0
W^1
W^2
W^3
W^4
W^5
W^6
W^7

×

W^{n2k}	$f_{(2)}$	$f_{(6)}$
$G_{(0\|8)}$	W^0	W^0
$G_{(1\|8)}$	W^0	W^2
$G_{(2\|8)}$	W^0	W^0
$G_{(3\|8)}$	W^0	W^2
$G_{(4\|8)}$	W^0	W^0
$G_{(5\|8)}$	W^0	W^2
$G_{(6\|8)}$	W^0	W^0
$G_{(7\|8)}$	W^0	W^2

W^n
W^0
W^1
W^2
W^3
W^4
W^5
W^6
W^7

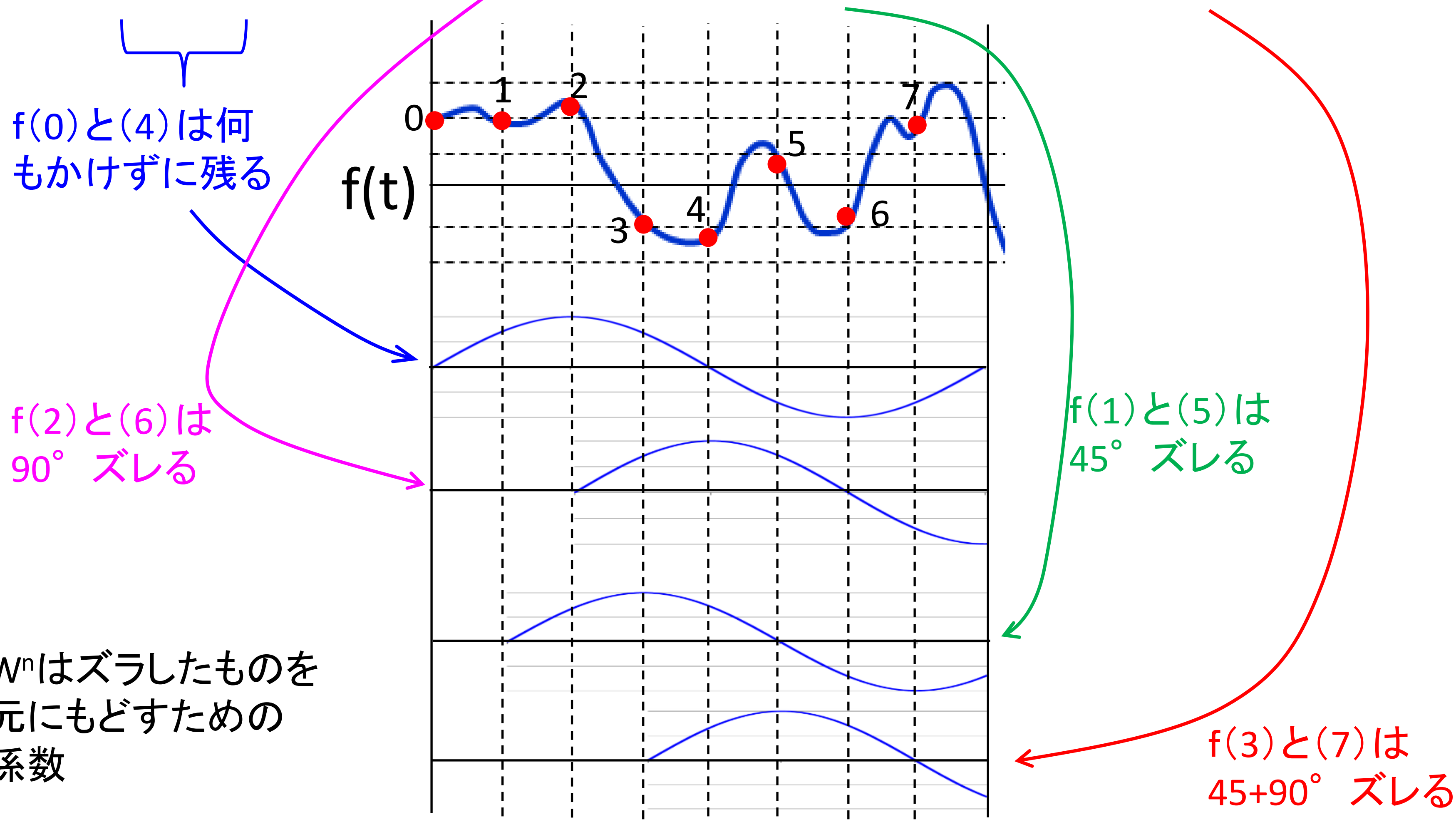
×

W^{n2k}	$f_{(1)}$	$f_{(5)}$
$G_{(0\|8)}$	W^0	W^0
$G_{(1\|8)}$	W^0	W^2
$G_{(2\|8)}$	W^0	W^0
$G_{(3\|8)}$	W^0	W^2
$G_{(4\|8)}$	W^0	W^0
$G_{(5\|8)}$	W^0	W^2
$G_{(6\|8)}$	W^0	W^0
$G_{(7\|8)}$	W^0	W^2

W^n
W^0
W^1
W^2
W^3
W^4
W^5
W^6
W^7

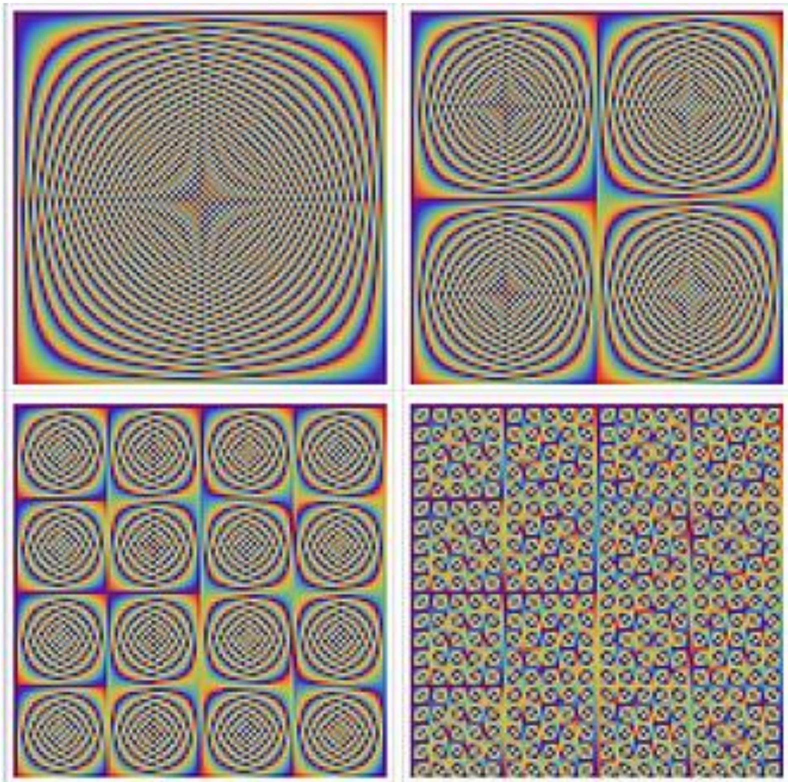
×

W^{n2k}	$f_{(3)}$	$f_{(7)}$
$G_{(0\|8)}$	W^0	W^0
$G_{(1\|8)}$	W^0	W^2
$G_{(2\|8)}$	W^0	W^0
$G_{(3\|8)}$	W^0	W^2
$G_{(4\|8)}$	W^0	W^0
$G_{(5\|8)}$	W^0	W^2
$G_{(6\|8)}$	W^0	W^0
$G_{(7\|8)}$	W^0	W^2



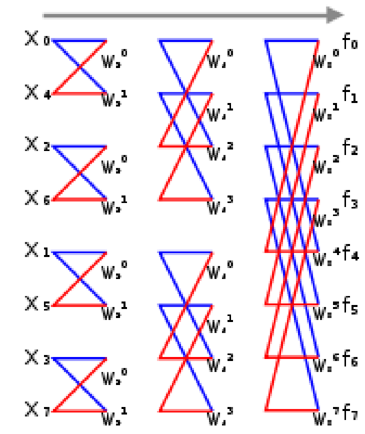
Wⁿはズラしたものを
元にもどすための
係数

FFTのアルゴリズム



データ数100の離散フーリエ変換の模式図。色は1の100乗根の偏角を表す。バタフライ演算により元の行列のパターンは最終的にデータ数5の離散フーリエ変換のパターンに分解される。

出典：
https://ja.wikipedia.org/wiki/%E9%AB%98%E9%80%9F%E3%83%95%E3%83%BC%E3%83%AA%E3%82%A8%E5%A4%89%E6%8F%9B



FFTのバタフライ演算

例えば、$N=4$ のとき、離散フーリエ係数は行列を用いて表現すると（$W=W_4$ と略記）

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 \\ W^0 & W^2 & W^4 & W^6 \\ W^0 & W^3 & W^6 & W^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

となる。入力列 x_k を添字の偶奇で分けて、以下のように変形する。

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^2 & W^1 & W^3 \\ W^0 & W^4 & W^2 & W^6 \\ W^0 & W^6 & W^3 & W^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0W^0 & W^0W^0 \\ W^0 & W^2 & W^1W^0 & W^1W^2 \\ W^0 & W^0 & W^2W^0 & W^2W^0 \\ W^0 & W^2 & W^3W^0 & W^3W^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

すると、サイズ 2 のFFTの演算結果を用いて表現でき、サイズの分割ができる。

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & W^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^1 \\ 1 & 0 & W^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_2^0 & W_2^0 & 0 & 0 \\ W_2^0 & W_2^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W_2^0 & W_2^0 \\ 0 & 0 & W_2^0 & W_2^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

また、この分割手順を図にすると蝶のような図になることから、**バタフライ演算**とも呼ばれる。