

$$\{\sigma\} = [D]\{\epsilon\} \quad (1.1)$$

連続体力学ではひずみや応力はテンソルで記述されます。しかし、有限要素法では、マトリックス演算をするために、テンソルをマトリックスやベクトルで記述して計算に使用します。



式(1.1)の $[D]$ を応力-ひずみマトリックスという。要素にひずみが生じることにより、要素内部にはひずみエネルギーが蓄積される。ばねが伸びたり縮んだりして、元に戻ろうとしている状況を想像するとよい。ひずみエネルギー E_i は、応力ベクトル $\{\sigma\}$ とひずみベクトル $\{\epsilon\}$ の内積を要素内で体積積分することによって得られる。

$$E_i = \frac{1}{2} \int_V \{\sigma\}^T \{\epsilon\} dV \quad (1.2)$$

応力 $\{\sigma\}$ とひずみ $\{\epsilon\}$ の掛け算は、ベクトルの内積になるため、式(1.2)では応力 $\{\sigma\}$ を転置して $\{\sigma\}^T$ としている。

スカラー値になる

ベクトル $\{a\} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ と $\{b\} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ の内積は

$\{a\} \cdot \{b\} = a_1 b_1 + a_2 b_2$ と計算されます。

これを行列の演算として表現すれば、 $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ となりますね。

したがってドットを使わない内積は、ベクトルの掛け算として $\{a\}^T \{b\}$ と書くことができます。意味していることはどれも同じです。



転置行列とは？

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \text{ の時}$$

転置行列は

$$A^T = \begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix}$$

$$A \cdot A^T = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2$$



平方和