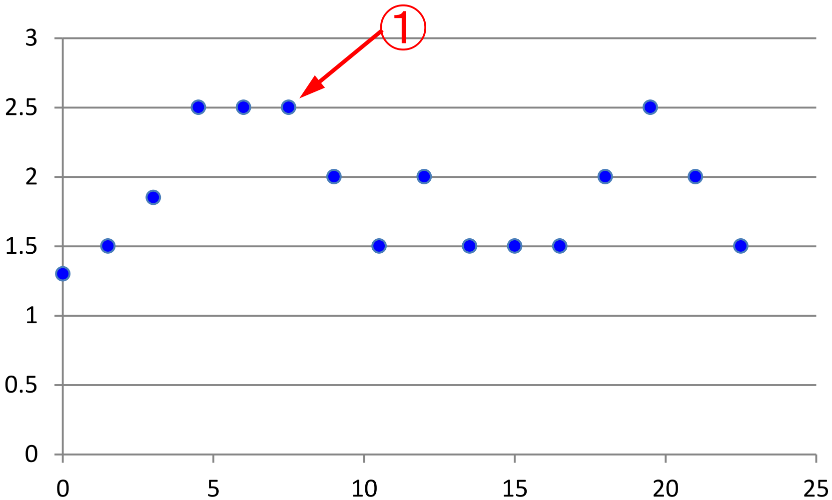
カーブフィッティングの方法

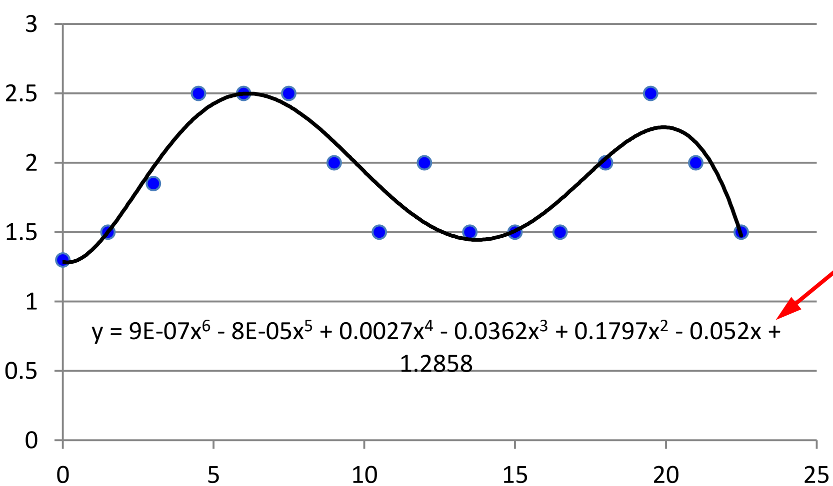
EXCELの近似式で十分ですか？

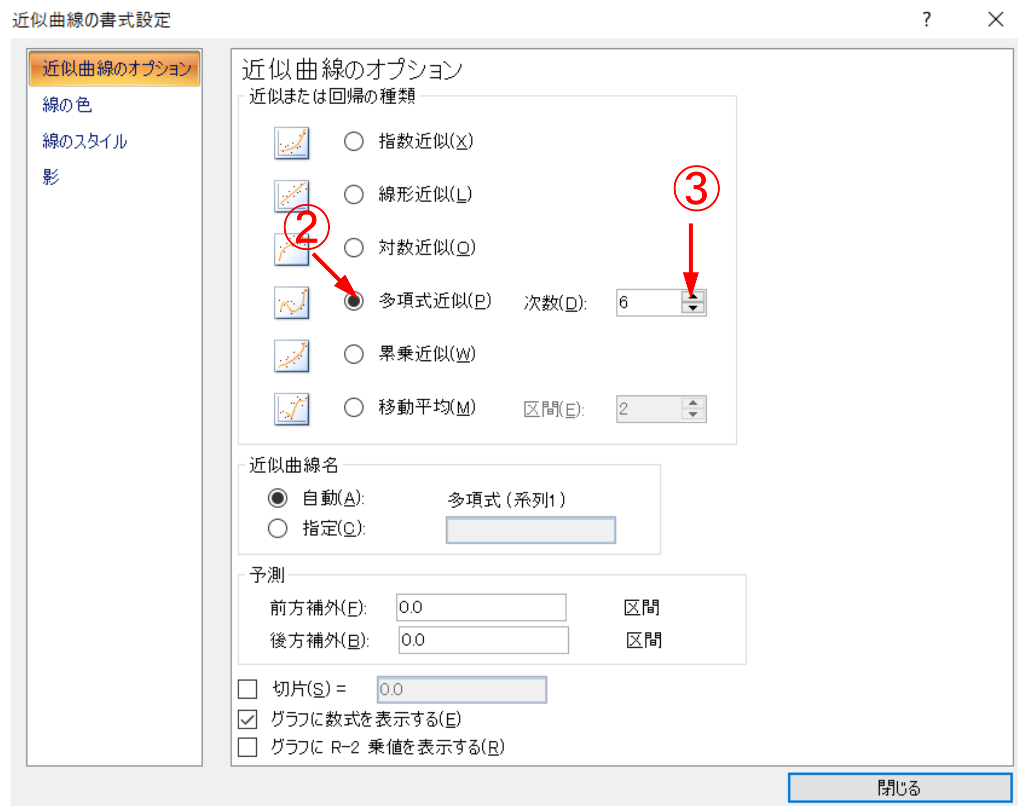
Excel

①データにカーソルを合わせ右クリック
②「近似曲線の追加」をクリックすると「近似曲線の書式設定」画面が表示
③「多項式近似」を選択し、次数を変えてフィットするものを探す
④「グラフに数式を表示する」を選択



多項式近似





多項式近似の次数は最高6次までのためフィッティングが困難な場合がある

連立方程式を解いて係数を算出

$(x_0, \quad y_0), (x_1, \quad y_1), (x_2, \quad y_2), \cdots\cdots (x_N, \quad y_N)$

$N+1$個のデータがあれば次式の連立方程式により

係数を求めることができる

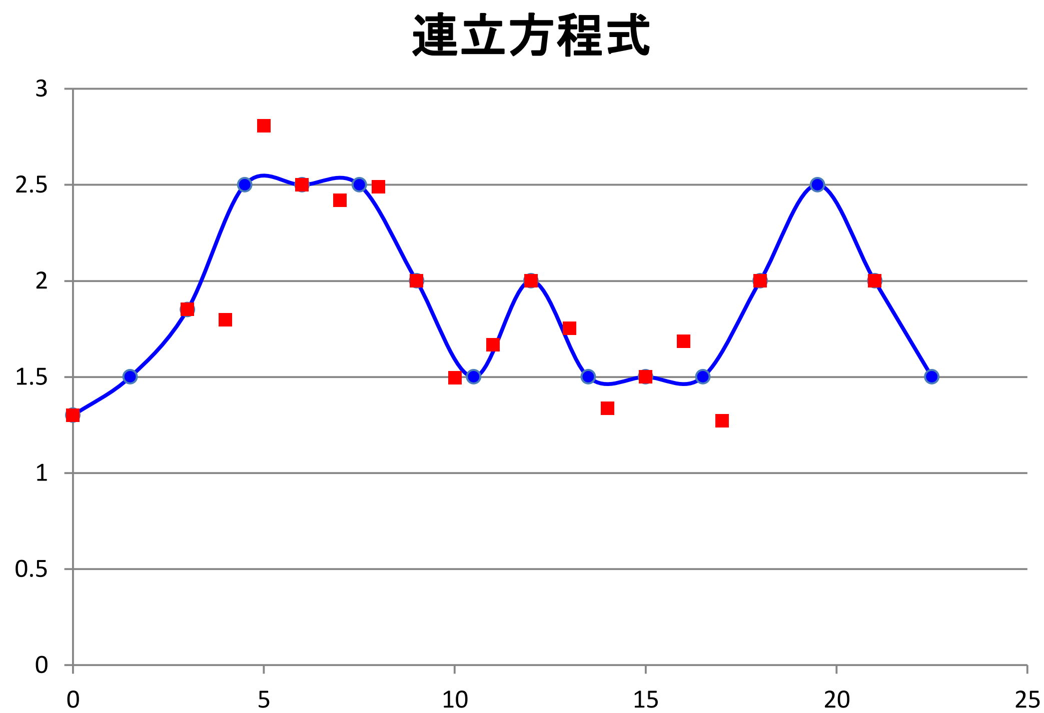
$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots\cdots a_N x^N \qquad \cdots\cdots(1)$$

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_0^1 & x_0^2 & \cdot & x_0^N \\ 1 & x_1^1 & x_1^2 & \cdot & x_1^N \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_N^1 & x_N^2 & \cdot & x_N^N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_N \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_0^1 & x_0^2 & \cdot & x_0^N \\ 1 & x_1^1 & x_1^2 & \cdot & x_1^N \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_N^1 & x_N^2 & \cdot & x_N^N \end{pmatrix}$$ とすると

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_N \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_N \end{pmatrix}$$

代入した値以外の**補間部分では外れる値が多い**



Excel操作

逆行列の作成法

	x	y
0	0	1.3
1	1.5	1.5
2	3	1.85
3	4.5	2.5
4	6	2.5
5	7.5	2.5
6	9	2
7	10.5	1.5
8	12	2
9	13.5	1.5
10	15	1.5
11	16.5	1.5
12	18	2
13	19.5	2.5
14	21	2
15	22.5	1.5

a0	a1	a2	a3	a4	a5
1	0	0	0	0	
1	1.5	2.25	3.3750	5.0625	7.5
1	3	9	27	81	
1	4.5	20	91	410	1
1	6	36	216	1296	7
1	7.5	56	422	3164	23
1	9	81	729	6561	59
1	10.5	110	1158	12155	127
1	12	144	1728	20736	248
1	13.5	182	2460	33215	448
1	15	225	3375	50625	759
1	16.5	272	4492	74120	1222
1	18	324	5832	104976	1889
1	19.5	380	7415	144590	2819
1	21	441	9261	194481	4084
1	22.5	506	11391	256289	5766

①　＝MINVERSE(□ : □)
②　F2を押す
③　セル範囲を指定
④　ShiftとCtrlを同時に押しながらEnter

①

逆行列

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_0^1 & x_0^2 & \cdot & x_0^N \\ 1 & x_1^1 & x_1^2 & \cdot & x_1^N \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_N^1 & x_N^2 & \cdot & x_N^N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_N \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_0^1 & x_0^2 & \cdot & x_0^N \\ 1 & x_1^1 & x_1^2 & \cdot & x_1^N \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_N^1 & x_N^2 & \cdot & x_N^N \end{pmatrix}$$ とすると

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_N \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_N \end{pmatrix}$$

ラグランジュ補間

分母は定数
分子はN乗の式で前ページの式(1)と同じ
求めたいx値の値を代入してy値が得られる

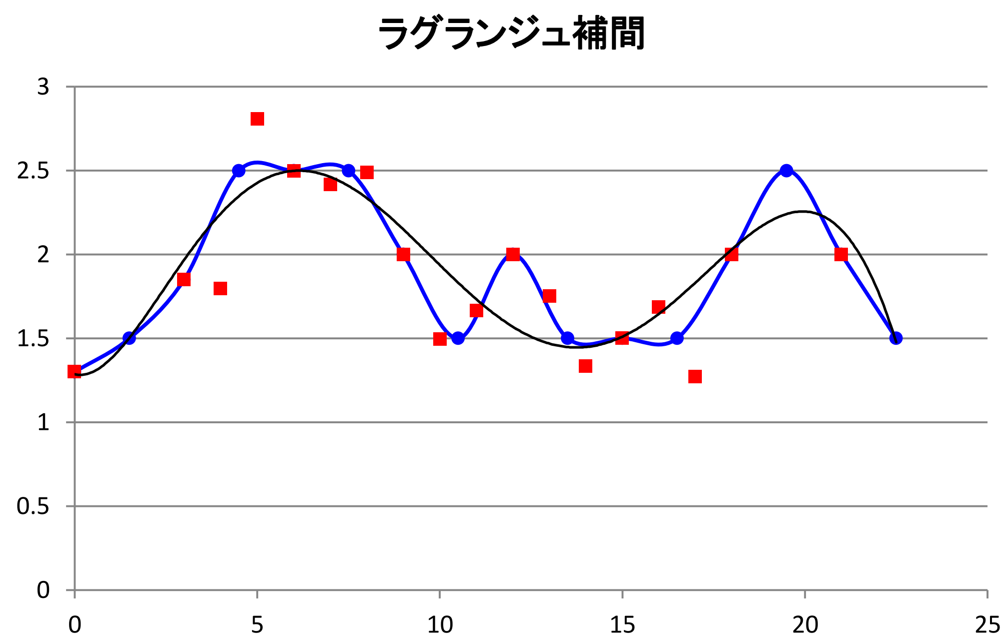
$$y = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\cdots\cdots(x-x_N)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)\cdots\cdots(x_0-x_N)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)\cdots\cdots(x-x_N)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_2)\cdots\cdots(x_1-x_N)}y_1$$

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)\cdots\cdots(x-x_N)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)\cdots\cdots(x_2-x_N)}y_2 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots\cdots(x-x_N)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)\cdots\cdots(x_3-x_N)}y_3 +$$

$$\cdots\cdot+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots\cdots(x-x_N)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)(x_k-x_3)\cdots\cdots(x_k-x_N)}y_k + \cdots\cdot$$

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots\cdots(x-x_{N-1})}{(x_N-x_0)(x_N-x_1)(x_N-x_2)\cdots\cdots(x_N-x_{N-1})}y_N \qquad \cdots\cdot(2)$$

連立方程式と同じ値となる



Excelのマクロ

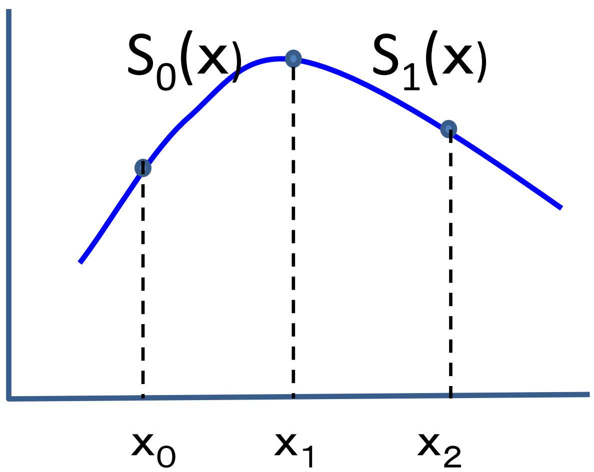
ラグランジュの補間法						
	関数表点数		16		補間点数	31
	補間する関数表				補間結果	
		x	y		x	f(x)
	0	0	1.3		0	1.30
	1	1.5	1.5		1	−17.6
	2	3	1.85		1.5	1.50
	3	4.5	2.5		2	6.07
	4	6	2.5		3	1.85
	5	7.5	2.5		4	1.80
	6	9	2		4.5	2.50
	7	10.5	1.5		5	2.81
	8	12	2		6	2.50
	9	13.5	1.5		7	2.42
	10	15	1.5		7.5	2.50
	11	16.5	1.5		8	2.49
	12	18	2		9	2.00
	13	19.5	2.5		10	1.50
	14	21	2		10.5	1.50
	15	22.5	1.5		11	1.66
					12	2.00
					13	1.75
					13.5	1.50
					14	1.34
					15	1.50
					16	1.69
					16.5	1.5
					17	1.27
					18	2
					19	3.71
					19.5	2.5
					20	−1.02
					21	2
					22	59.57
					22.5	1.5

```
Sub Macro1()
'' Macro1 Macro

  Dim x() As Double
  Dim y() As Double
  Dim no As Integer '補間する関数表の点数
  no = Cells(3, 4)
  ReDim x(no) As Double '補間する関数表のx値
  ReDim y(no) As Double '補間する関数表のy値

  For i = 0 To no - 1
    x(i) = Cells(7 + i, 3)
    y(i) = Cells(7 + i, 4)
  Next
  noh = Cells(3, 7) '補間点数
  Dim xx As Double '補間するx値
  Dim yy As Double '補間するy値
  Dim Lk As Double 'Lk(x)
  For i = 0 To noh - 1
    xx = Cells(7 + i, 6)
    yy = 0#
    For k = 0 To no - 1
    Lk = 1#
      For j = 0 To no - 1
        If k <> j Then Lk = Lk * (xx - x(j)) / (x(k) - x(j))
        Next
      yy = yy + Lk * y(k)
      Next
      Cells(7 + i, 7) = yy
    Next
End Sub
```

スプライン補間法



$$S_0(x) = a_0 + b_0(x - x_0) + c_0(x - x_0)^2 + d_0(x - x_0)^3 \cdots (1)$$

$$S_1(x) = a_1 + b_1(x - x_1) + c_1(x - x_1)^2 + d_1(x - x_1)^3$$

$$S_0(x_0) = a_0 = f(x_0)$$

$$S_1(x_1) = a_1 = a_0 + b_0(x_1 - x_0) + c_0(x_1 - x_0)^2 + d_0(x_1 - x_0)^3$$

$$h_0 = x_1 - x_0, \qquad a_n = f(x_n)$$

$$a_1 = a_0 + b_0 h_0 + c_0 h_0{}^2 + d_0 h_0{}^3$$

式(1)を微分して$b_n = S'(x_n)$とおくと

$$S'_0(x) = b_0 + 2c_0(x - x_0) + 3d_0(x - x_0)^2$$

$$S'_0(x_1) = b_0 + 2c_0(x_1 - x_0) + 3d_0(x_1 - x_0)^2$$

$$= b_0 + 2c_0 h_0 + 3d_0 h_0{}^2$$

$$S'_1(x_1) = b_1 = b_0 + 2c_0 h_0 + 3d_0 h_0{}^2$$

$$S''_1(x_1) = S''_0(x_1), \qquad S''(x_n)/2 = C_n$$

$$S''_0(x_1) = 2c_0 + 6d_0 h_0$$

$$S''_1(x_1) = 2C_1$$

$$c_1 = c_0 + 3d_0 h_0$$

$$d_0 = \frac{c_1 - c_0}{3h_0}$$

$$a_1 = a_0 + b_0 h_0 + c_0 h_0{}^2 + \frac{h_0{}^2}{3}(2c_0 + c_1)$$

$$b_1 = b_0 + h_0(c_0 + c_1)$$

$$b_0 = \frac{1}{h_0}(a_1 - a_0) - \frac{h_0}{3}(2c_0 + c_1)$$

$$\frac{3}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \frac{3}{h_{j-1}}(a_j - a_{j-1}) = h_{j-1}c_{j-1} + 2(h_j + h_{j-1})c_j + h_j c_{j+1}$$

境界条件$c_0 = 0, \qquad c_n = 0$

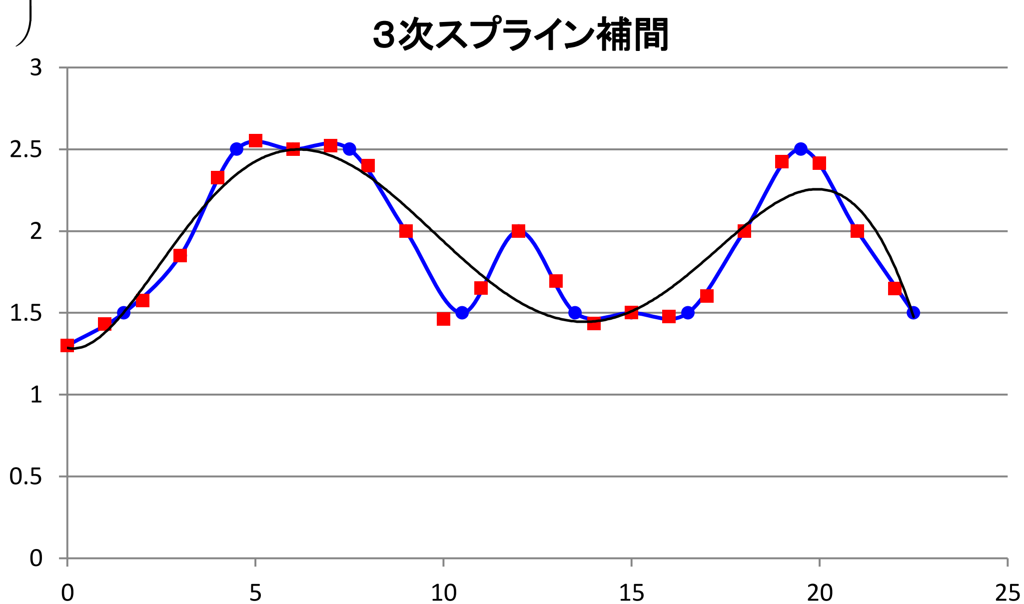
$$
A = \begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
h_0 & 2(h_1 + h_0) & h_1 & & & 0 \\
\vdots & h_1 & 2(h_2 + h_1) & h_2 & & \vdots \\
\vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
0 & & & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1
\end{pmatrix}
$$

$$
x = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}
\qquad
u = \begin{pmatrix}
0 \\
\frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) - \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) \\
\frac{3}{h_2}(a_3 - a_2) - \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) \\
\vdots \\
\frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_j) - \frac{3}{h_{n-2}}(a_{n-1} - a_{n-2}) \\
0
\end{pmatrix}
$$

$$A \cdot x = u$$

$$x = A^{-1} u$$

c_jを算出、次にb_j及びd_jを算出



フーリエ変換

どんな複雑な波もシンプルな波の足し算である

シンプルな波　$y(t) = A\sin\omega t$

複雑な波　$y(t) = \sum_{\omega} A(\omega)\sin\omega t$

整数

ω：周波数　　$A(\omega)$: 周波数ωの波の振幅

実数

$$y(t) = \int A(\omega)\sin\omega t\,d\omega$$

オイラーの公式

$$\cos t + i\sin t = e^{it}$$

sin波だけでなく
cos波も仲間に
入れたい

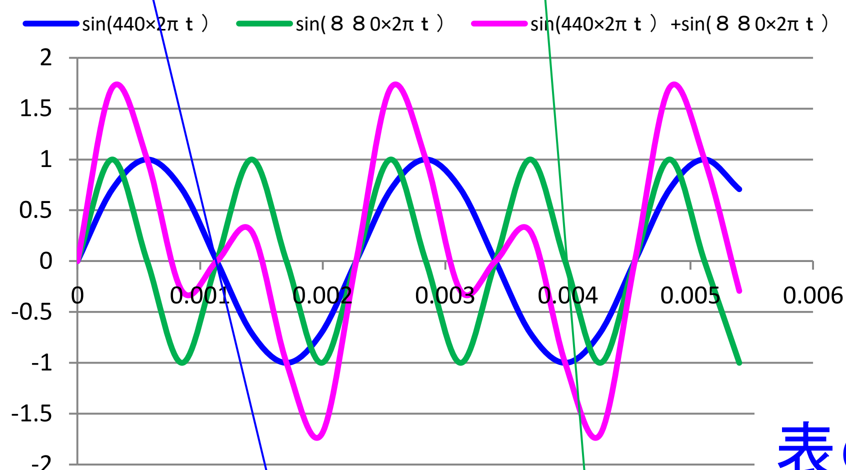
$$\boxed{y(t) = \int A(\omega)e^{i\omega t}d\omega}$$

虚数i は、我々の目に見えない「仏の世界」
愛i が世界に平和をもたらす

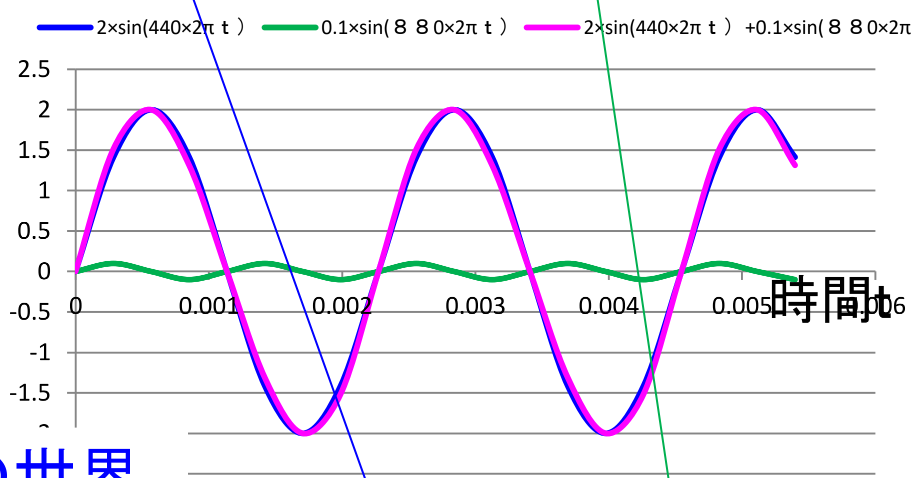
時報　ポッポッポ　ポーン

440Hz　880Hz

$$y(t) = 1 \times \sin(440 \times 2\pi t) + 1 \times \sin(880 \times 2\pi t)$$



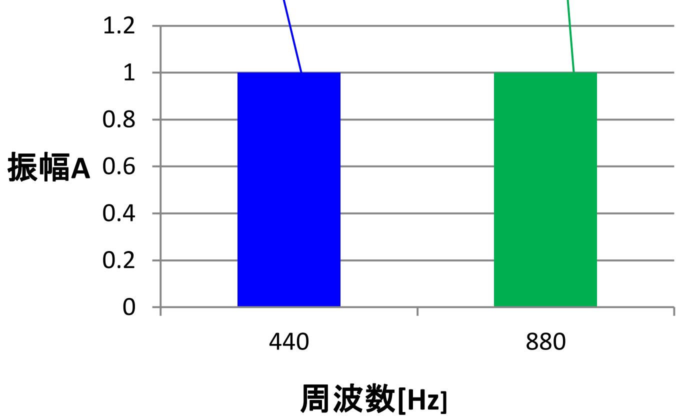
$$y(t) = 2 \times \sin(440 \times 2\pi t) + 0.1 \times \sin(880 \times 2\pi t)$$



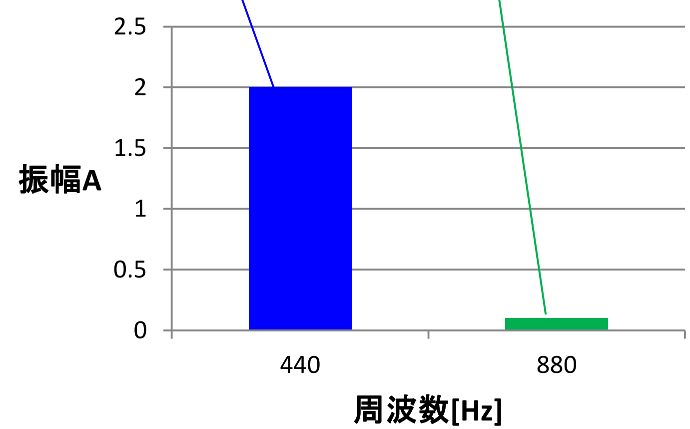
表の世界

フーリエ変換

裏の世界



パワースペクトル

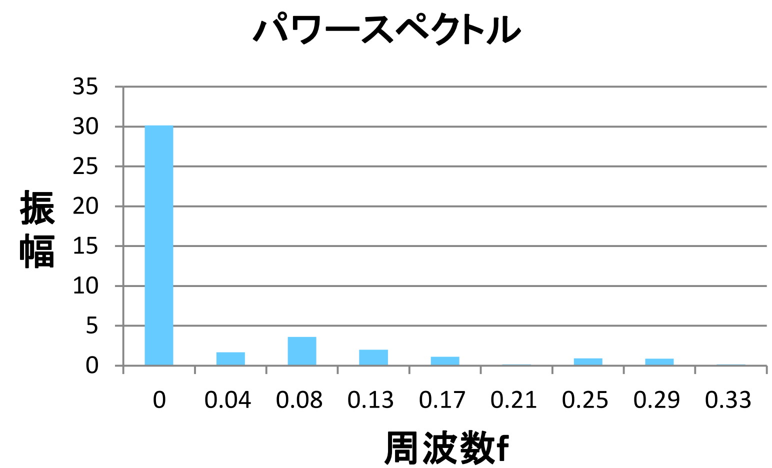


xを時間軸、yを振幅とした波とする

x	y
0	1.3
1.5	1.5
3	1.85
4.5	2.5
6	2.5
7.5	2.5
9	2
10.5	1.5
12	2
13.5	1.5
15	1.5
16.5	1.5
18	2
19.5	2.5
21	2
22.5	1.5

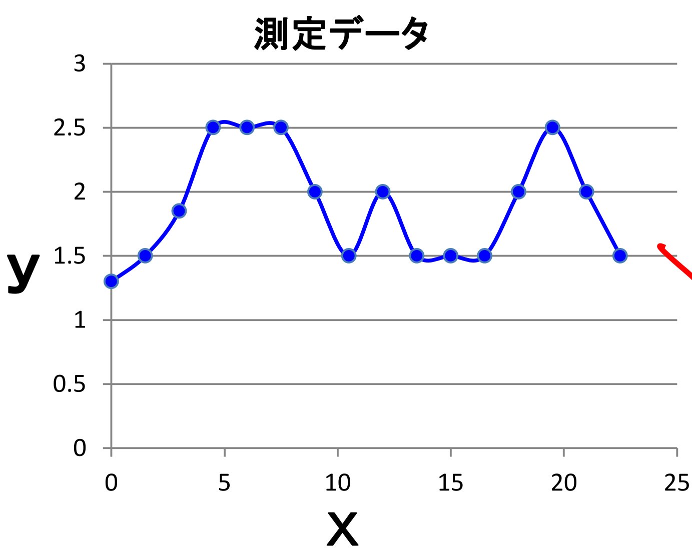
Excelの分析
ツールにある
フーリエ変換

周波数fに対して振幅をプロットした
パワースペクトルとする

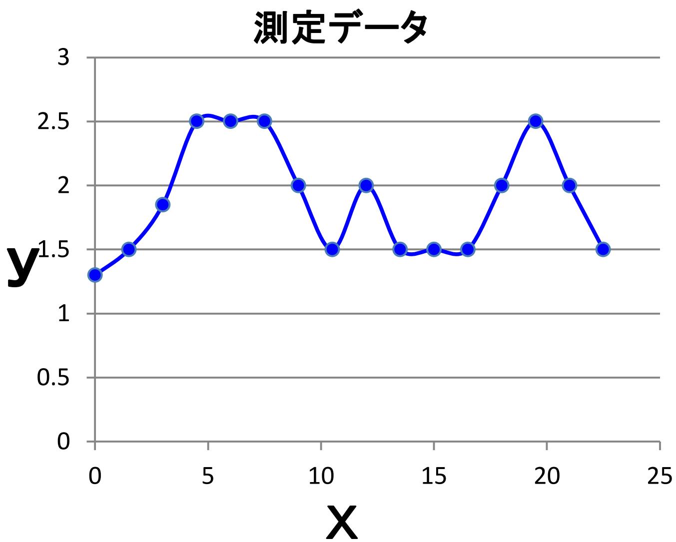


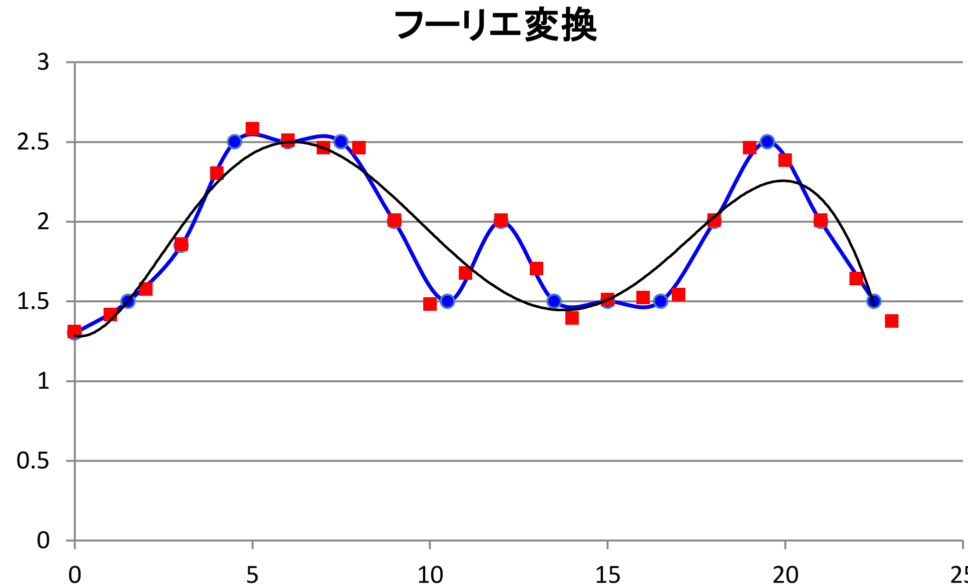
フーリエ逆変換

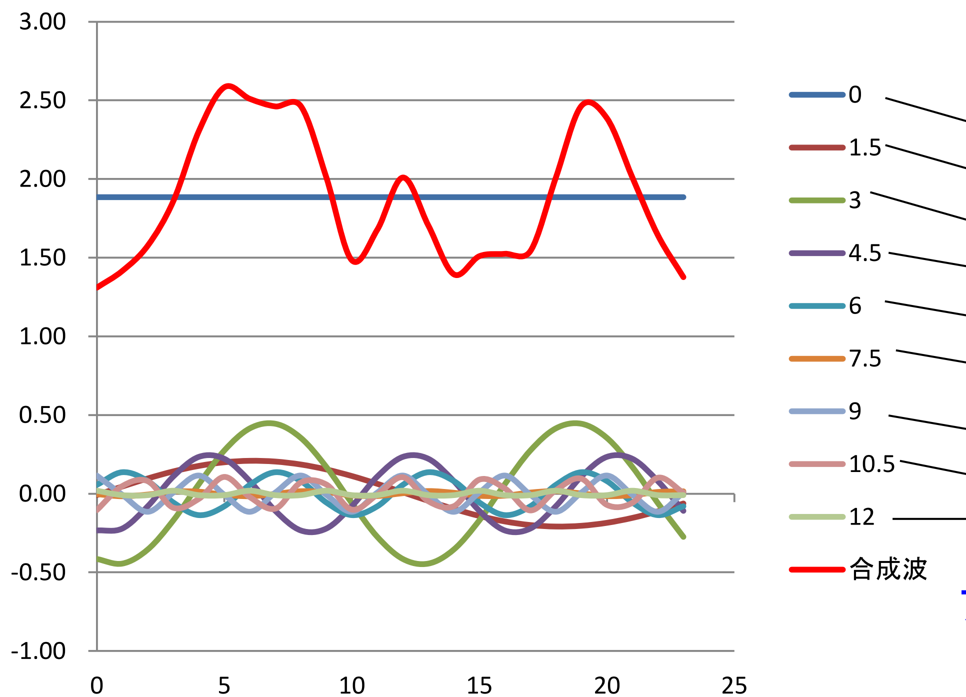
cos	sin	f
1.88	0.00	0
−0.01	0.21	0.04
−0.42	−0.17	0.08
−0.23	−0.08	0.13
0.06	0.13	0.17
0.00	−0.02	0.21
0.12	−0.01	0.25
−0.10	0.02	0.29
0.02	0.00	0.33



上記の振幅と周波数のcos波とsin波の
合成波である



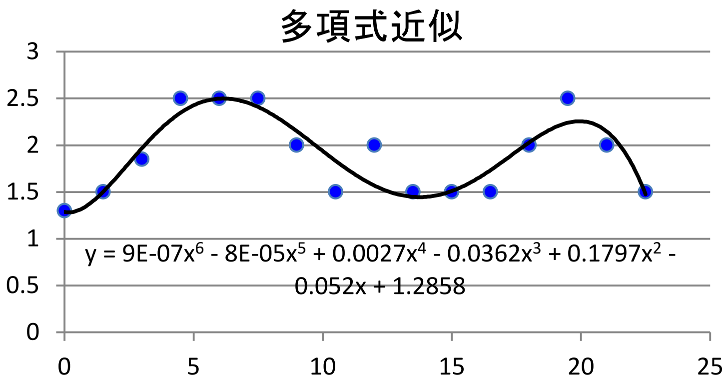


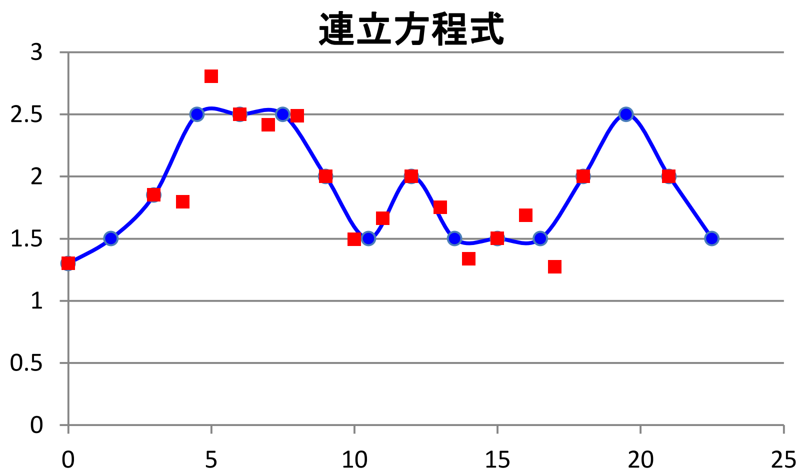


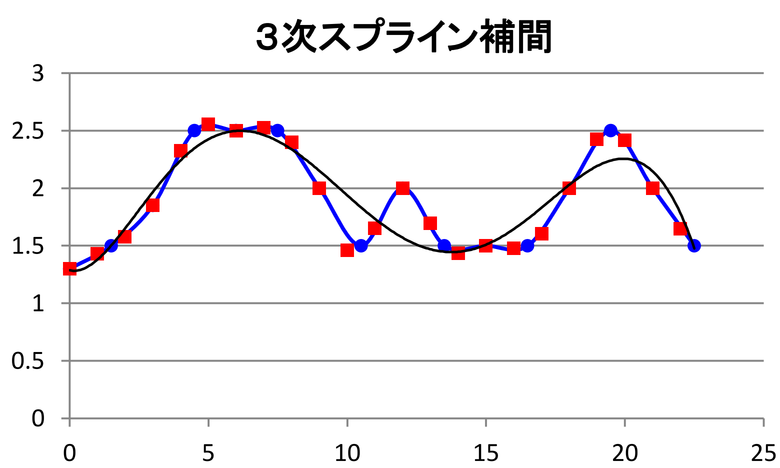
cos	sin	f
1.88	0.00	0
−0.01	0.21	0.04
−0.42	−0.17	0.08
−0.23	−0.08	0.13
0.06	0.13	0.17
0.00	−0.02	0.21
0.12	−0.01	0.25
−0.10	0.02	0.29
0.02	0.00	0.33

フーリエ逆変換の結果

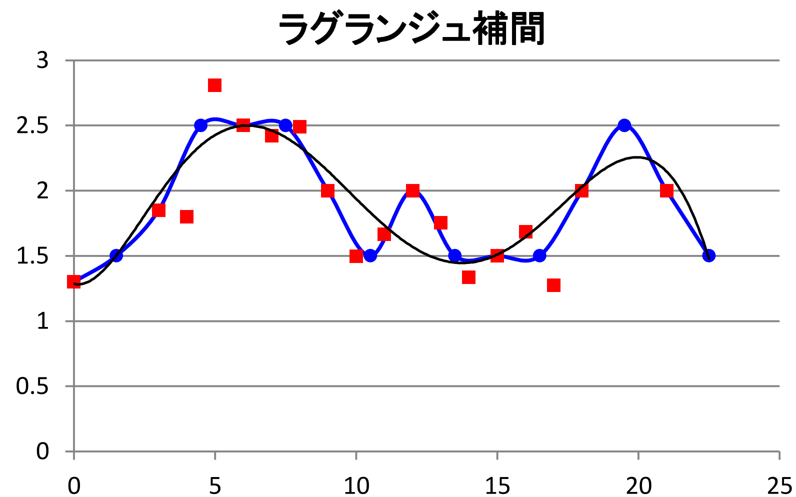
Excelのマクロ組めればスプライン
あるいは
フーリエ変換が好ましい

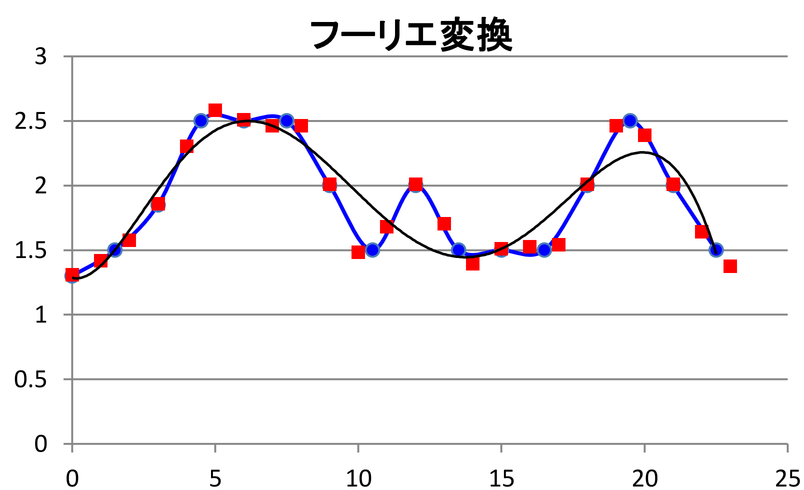






＝





おまけ

連続した曲線であれば三角関数で全て表せるか？
例えば矩形波は？
三角は？

↓

できます。

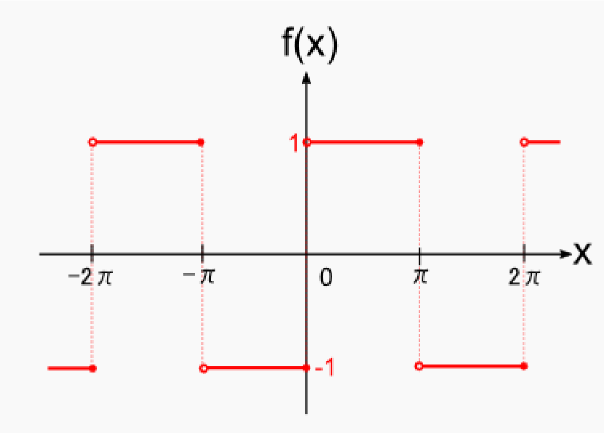
連続した曲線$f(x)$は、以下の式で表せます

$$f(x) = \sum_{0}^{n} a_n \cos x + b_n \sin x$$

上記の係数a_nとb_nをフーリエ変換で求めればよい

以下参照

矩形波をフーリエ変換してsinとcos波で表すと



$$f(x)=\begin{cases}-1 & -\pi < x \leq 0\\ 1 & 0 < x \leq \pi\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}-1 & (2n-1)\pi < x \leq 2n\pi\\ 1 & 2n\pi < x \leq (2n+1)\pi\end{cases}$$

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{1}{\pi} < f(x), 1 > \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -1\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 1\,dx \\ &= -\frac{1}{\pi}[x]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}[x]_{0}^{\pi} \\ &= -\frac{1}{\pi}\cdot\pi + \frac{1}{\pi}\cdot\pi \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{\pi} < f(x), cos(nx) > \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(nx)dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(nx)\,dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -1\cdot cos(nx)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 1\cdot cos(nx)\,dx \\ &= -\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n}sin(nx)\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n}sin(nx)\right]_{0}^{\pi} \\ &= -\frac{1}{\pi}\cdot 0 + \frac{1}{\pi}\cdot 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

$$b_n = \frac{4}{(2n-1)\pi}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} < f(x), sin(nx) > \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) sin(nx)\, dx \end{aligned}$$

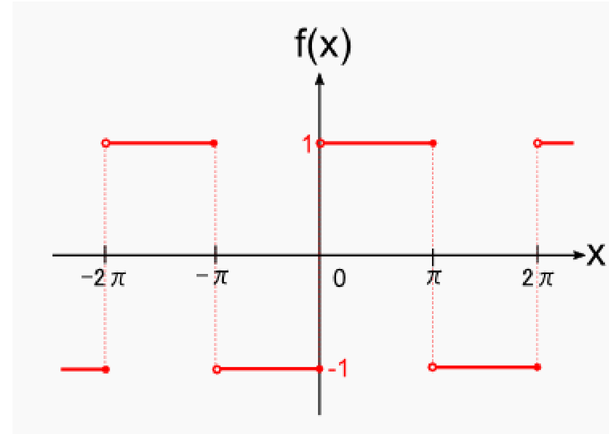
$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) sin(nx)\, dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -1 \cdot sin(nx)\, dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 1 \cdot sin(nx)\, dx \\ &= -\frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{n} cos(nx)\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{n} cos(nx)\right]_{0}^{\pi} \\ &= \frac{1}{n\pi}\left[1 - cos(-n\pi)\right] - \frac{1}{n\pi}\left[cos(n\pi) - 1\right] \\ &= \frac{2}{n\pi} - \frac{2}{n\pi} cos(n\pi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{n\pi} - \frac{2}{n\pi} cos(n\pi) \\ &= \frac{2}{n\pi} \cdot (1 - (-1)^n) \\ &= \begin{cases} \frac{4}{n\pi} & n = 2m-1 \\ 0 & n = 2m \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, sin(nx) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{2n-1}\, sin\left\{(2n-1)x\right\} \\ &= \frac{4}{\pi}\left\{ sin(x) + \frac{1}{3} sin(3x) + \frac{1}{5} sin(5x) + \frac{1}{7} sin(7x) + \cdots \right\} \end{aligned}$$

矩形波を三角関数で表すと

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{2n-1} \sin\{(2n-1)x\} \\
&= \frac{4}{\pi}\left\{\sin(x) + \frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{1}{5}\sin(5x) + \frac{1}{7}\sin(7x) + \cdots\right\}
\end{aligned}
$$

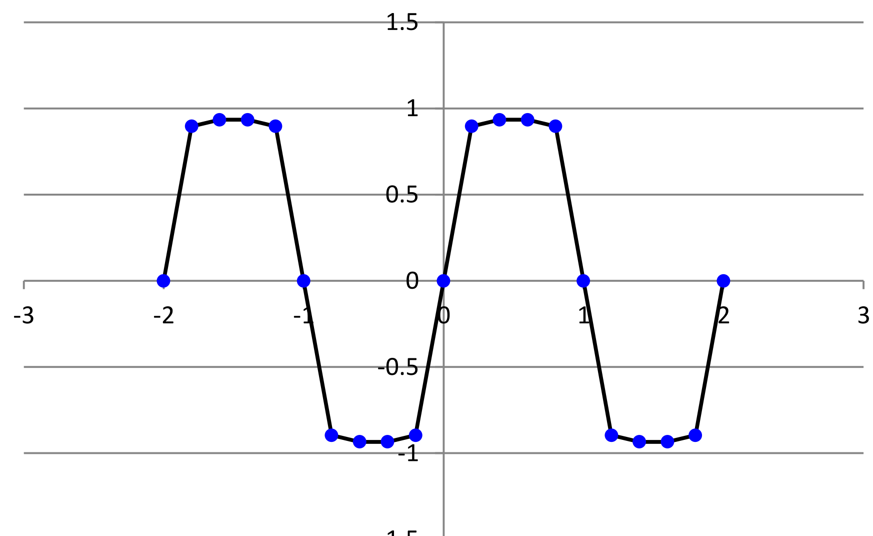


EXCELで以下の個数まで算出

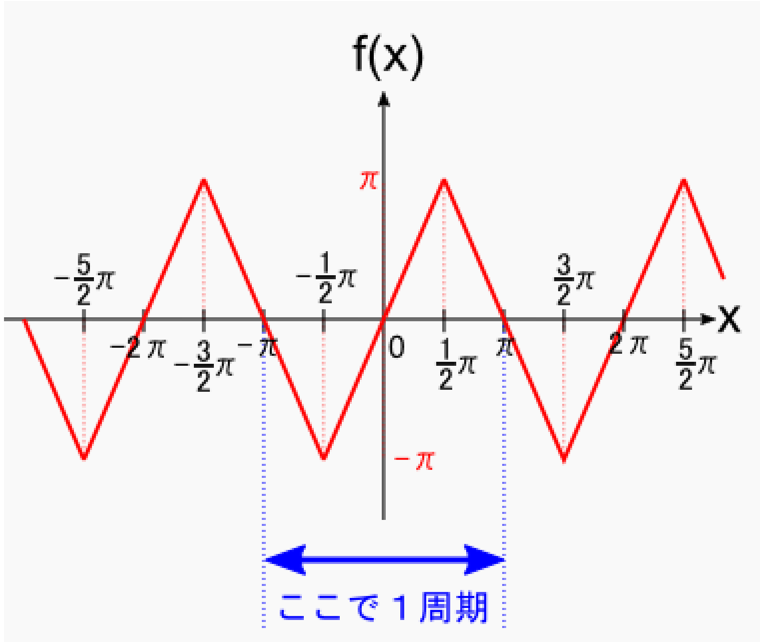
$$
f(x) = \frac{4}{\pi}\left\{\sin(x) + \frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{1}{5}\sin(5x) + \frac{1}{7}\sin(7x) + \frac{1}{9}\sin(9x)\right\}
$$

		1	3	5	7	9	合計
−2π	−2	3.1E−16	3.1E−16	3.12E−16	3.12E−16	3.12E−16	1.56E−15
	−1.8	0.74839	0.40364	−2.8E−16	−0.17299	−0.08315	0.8958888
	−1.6	1.21092	−0.2495	2.5E−16	0.106913	−0.13455	0.933825
	−1.4	1.21092	−0.2495	−2.2E−16	0.106913	−0.13455	0.933825
	−1.2	0.74839	0.40364	1.87E−16	−0.17299	−0.08315	0.8958888
−π	−1	−2E−16	−2E−16	−1.6E−16	−1.6E−16	−1.6E−16	−7.8E−16
	−0.8	−0.7484	−0.4036	1.25E−16	0.172989	0.083155	−0.895889
	−0.6	−1.2109	0.24946	−9.4E−17	−0.10691	0.134547	−0.933825
	−0.4	−1.2109	0.24946	6.24E−17	−0.10691	0.134547	−0.933825
	−0.2	−0.7484	−0.4036	−3.1E−17	0.172989	0.083155	−0.895889
0	0	0	0	0	0	0	0
	0.2	0.74839	0.40364	3.12E−17	−0.17299	−0.08315	0.8958888
	0.4	1.21092	−0.2495	−6.2E−17	0.106913	−0.13455	0.933825
	0.6	1.21092	−0.2495	9.36E−17	0.106913	−0.13455	0.933825
	0.8	0.74839	0.40364	−1.2E−16	−0.17299	−0.08315	0.8958888
π	1	1.6E−16	1.6E−16	1.56E−16	1.56E−16	1.56E−16	7.8E−16
	1.2	−0.7484	−0.4036	−1.9E−16	0.172989	0.083155	−0.895889
	1.4	−1.2109	0.24946	2.18E−16	−0.10691	0.134547	−0.933825
	1.6	−1.2109	0.24946	−2.5E−16	−0.10691	0.134547	−0.933825
	1.8	−0.7484	−0.4036	2.81E−16	0.172989	0.083155	−0.895889
2π	2	−3E−16	−3E−16	−3.1E−16	−3.1E−16	−3.1E−16	−1.56E−15

計算の個数を増すと矩形波に近づく



三角波をフーリエ変換してsinとcos波で表すと



$$f(x) = \begin{cases} -2(x+\pi) & -\pi < x \leq -\frac{1}{2}\pi \\ 2x & -\frac{1}{2}\pi < x \leq \frac{1}{2}\pi \\ -2(x-\pi) & \frac{1}{2}\pi < x \leq \pi \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, sin(nx) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\pi} \cdot \frac{1}{n^2}\, sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cdot sin\,(nx) \\ &= \frac{8}{\pi}\left\{sin(x) - \frac{1}{9}sin(3x) + \frac{1}{25}sin(5x) - \frac{1}{49}sin(7x) + \cdots\right\} \end{aligned}$$