経済数学の直観的方法
確率・統計編

長沼伸一郎　著

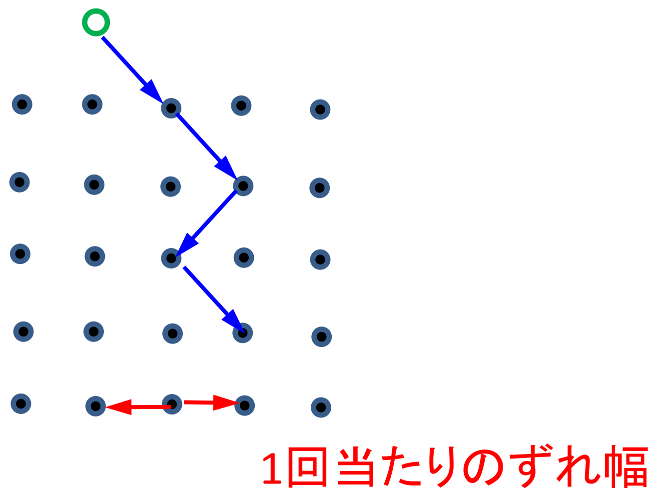
１．確率統計の根本思想　　←統計と聞くだけで敬遠

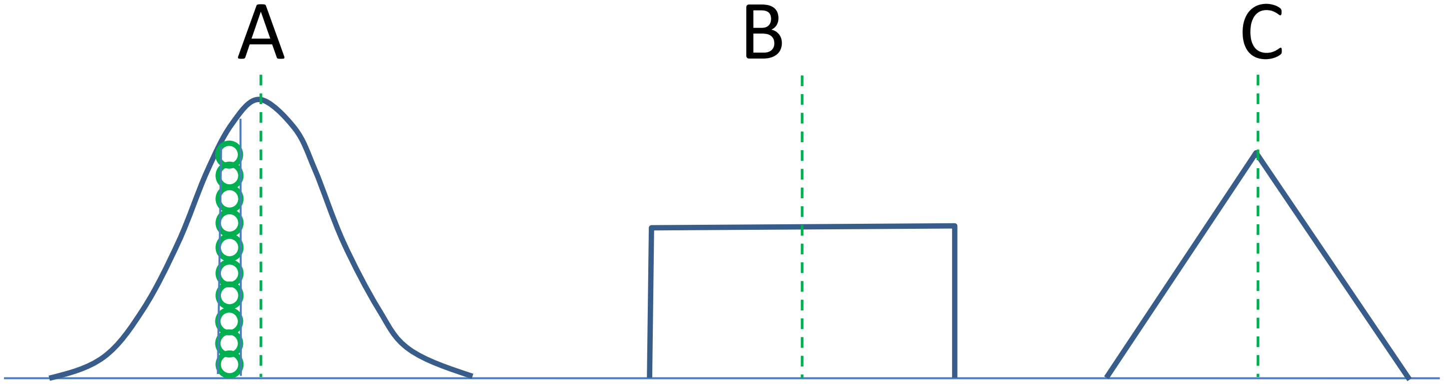
２．ブラック・ショールズ理論　　←経済数学の難解理論

脱却

課題解決のヒントにする

Q.　パチンコの玉が釘に当たって下に落ちるとどの形状になるか？





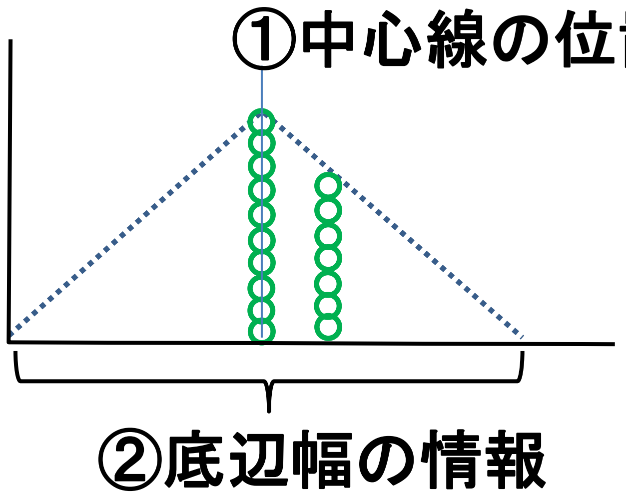
ガウスが発見

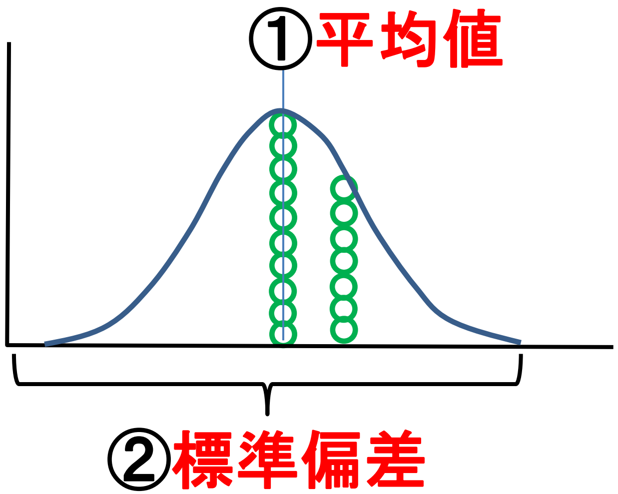
正規分布曲線

三角形に100個のパチンコの玉が積まれている場合は、以下
①及び②の情報で分布の広がりがわかる

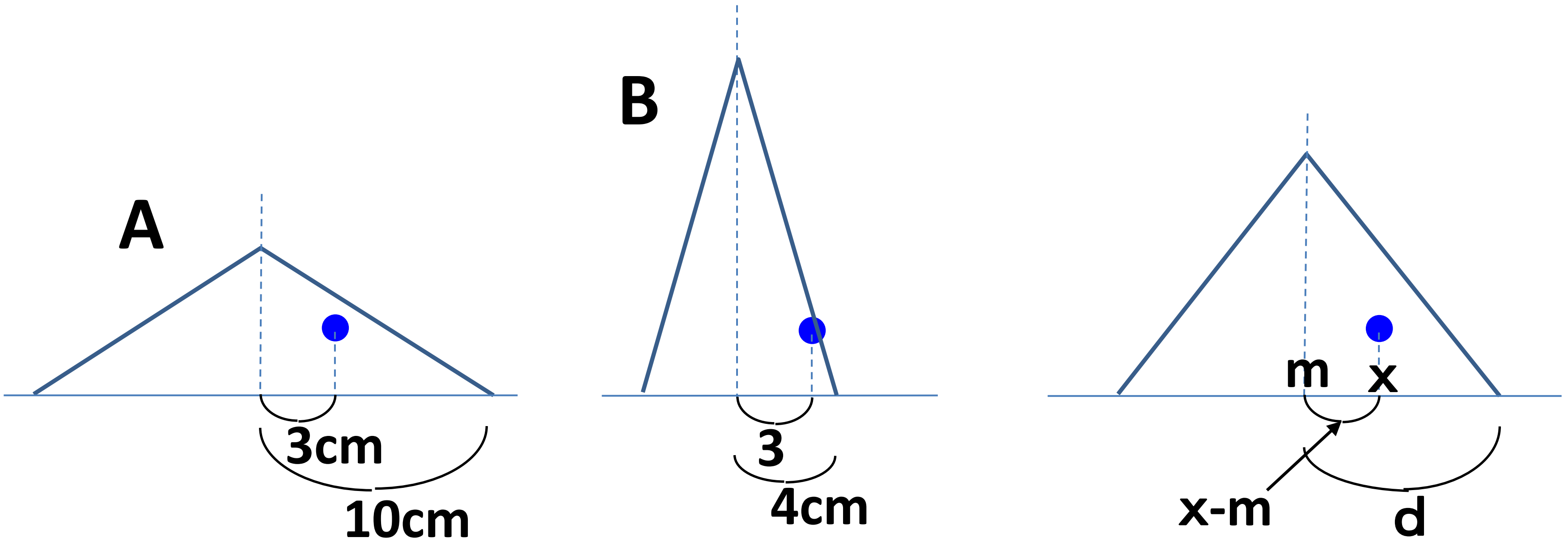
パラレル・ワールド

現実社会





パラレル・ワールドの「偏差値」は？



$$\frac{\text{ずれの大きさ}}{\text{底辺の長さ}}$$

$$偏差値 = \frac{x-m}{d}$$

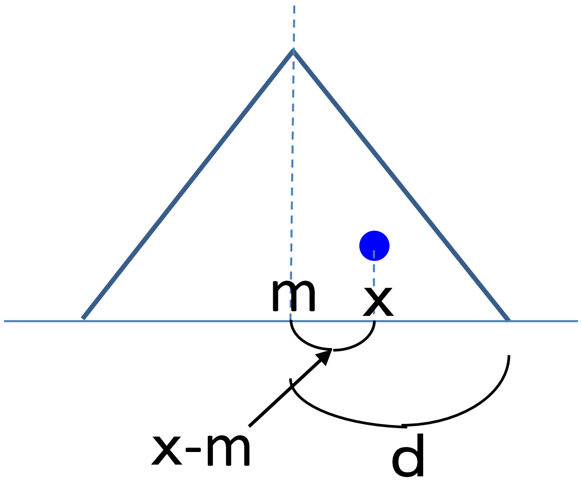
A

$$\frac{3}{10} = 0.3$$

B

$$\frac{3}{4} = 0.75$$

パラレル・ワールド



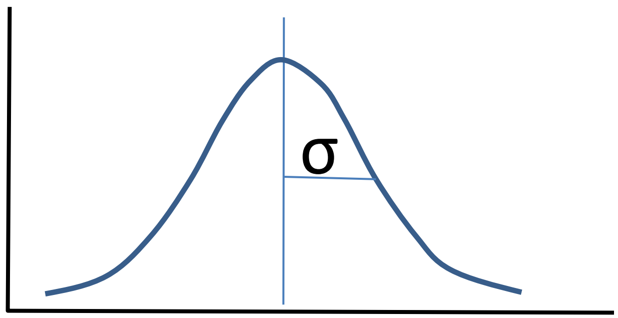
$$偏差値 = \frac{x-m}{d}$$

$x = m$のとき　　偏差値$= 0$

平均の偏差値を50点とするためには

$$偏差値 = \frac{x-m}{d} \times 10 + 50 とする$$

現実社会



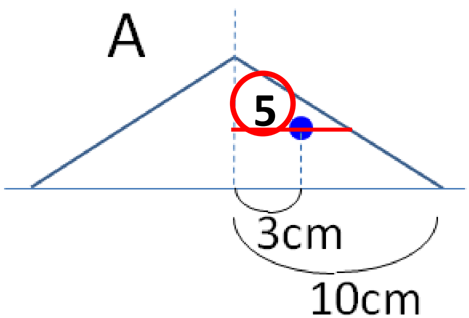
$$偏差値 = \frac{x-m}{\sigma}$$

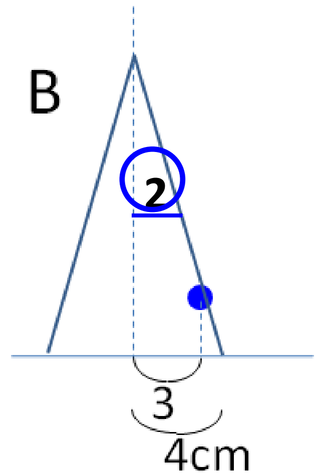
$x = m$のとき　　偏差値$= 0$

平均の偏差値を50点とするためには

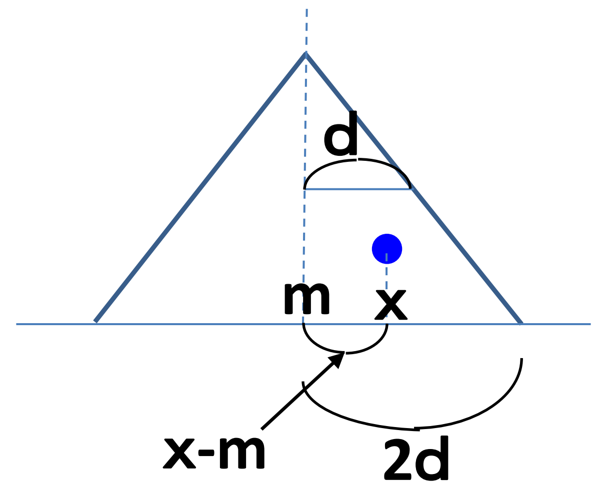
$$偏差値 = \frac{x-m}{\sigma} \times 10 + 50 とする$$

パラレル・ワールド





$$偏差値 = \frac{x-m}{d} \times 10 + 50$$



A

$$\frac{3}{10} \times 10 + 50 = 53$$

B

$$\frac{3}{4} \times 10 + 50 = 57.5$$

底辺の右端が偏差値70にするためには
底辺の半分のdを基準して偏差値を算出

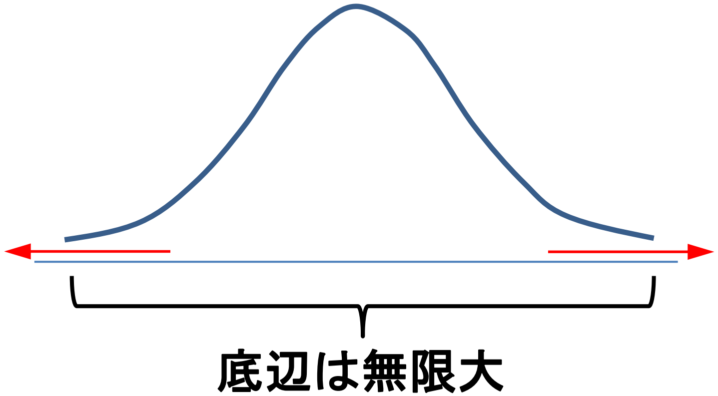
$$偏差値 = \frac{2d}{d} \times 10 + 50 = 70$$

A

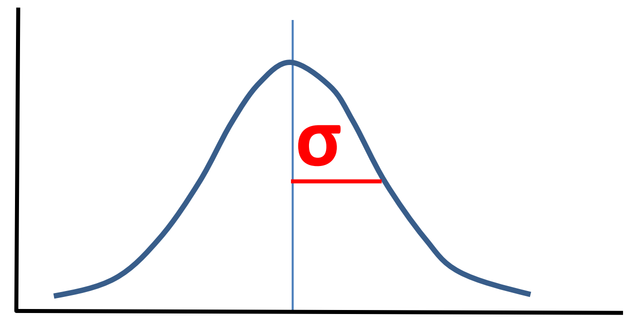
$$\frac{3}{5} \times 10 + 50 = 56$$

B

$$\frac{3}{2} \times 10 + 50 = 65$$



現実社会



正規分布の場合は三角形のように底辺が有限の値にならないため、偏差値が計算不能

↓

分布の広がりとしてσを採用する

$$偏差値 = \frac{x-m}{\sigma}$$

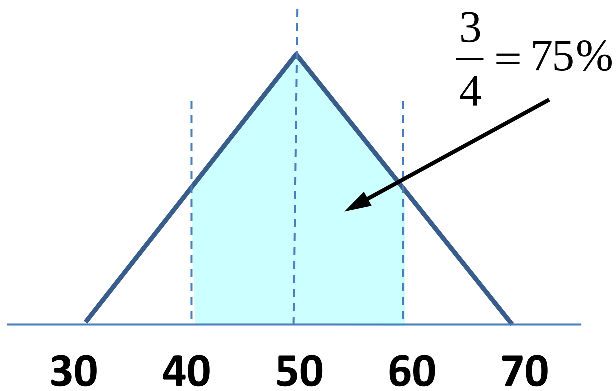
$x = m$ のとき　　$偏差値 = 0$

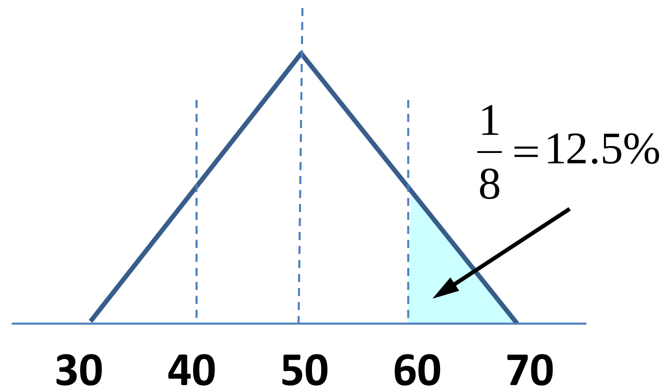
平均の偏差値を50点とするためには

$$偏差値 = \frac{x-m}{\sigma}\times 10 + 50 とする$$

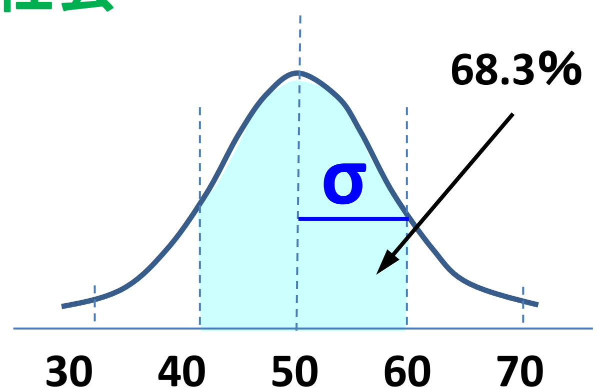
パラレル・ワールド

偏差値をみれば全体の内の何%かを計算できる





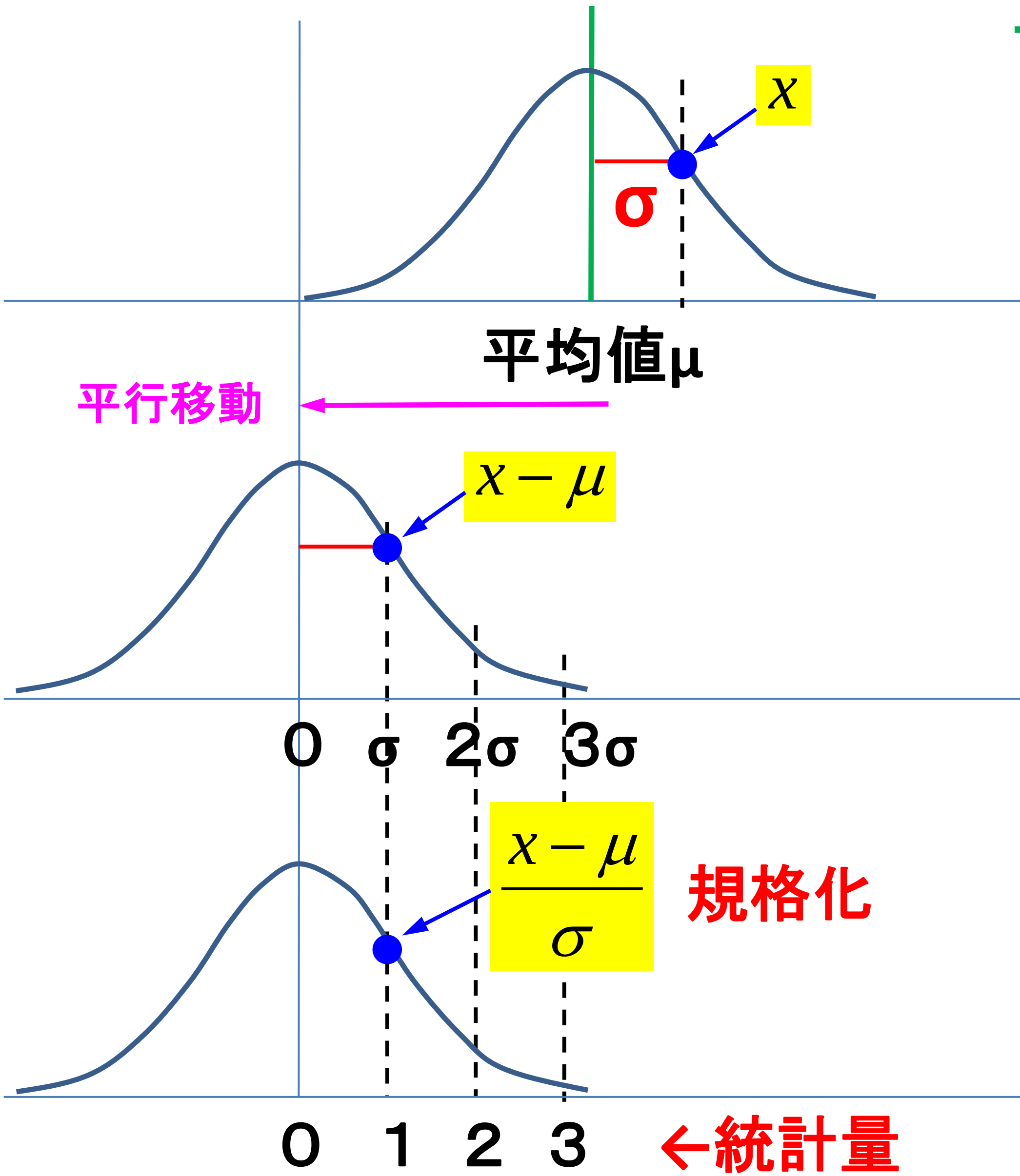
現実社会



$$\frac{x-m}{\sigma}\times 10+50=\frac{\sigma}{\sigma}\times 10+50=60$$

$$\frac{x-m}{\sigma}\times 10+50=\frac{2\sigma}{\sigma}\times 10+50=70$$

標準偏差σとは？ ⇨ 変曲点での幅



正規分布曲線の一般式

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

平均値$\mu=0$とすると

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

標準偏差$\sigma=1$とすると

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

変曲点のx座標がσになる計算

$$f(x)=e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

平均値$\mu=0$　　$a=\dfrac{1}{2\sigma^2}$

$$f(x)=e^{-ax^2}$$

1 階微分すると

$$f'(x)=-2axe^{-ax^2}$$

2階微分すると

$$f''(x)=-2ae^{-ax^2}+(-2ax)^2e^{-ax^2}$$

$$=2ae^{-ax^2}(2ax^2-1)$$

変曲点は二階微分＝0

変曲点は$f''(x)=0$なので$2ae^{-ax^2}\underline{(2ax^2-1)=0}$より

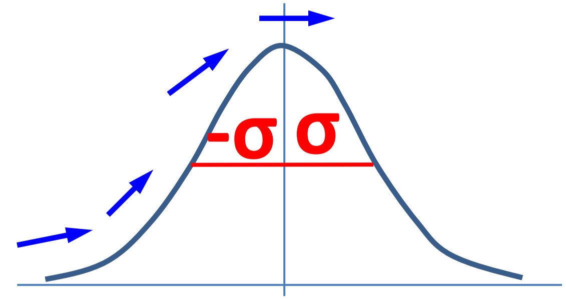
$x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2a}}=\pm\sigma$　　$y=e^{-\frac{1}{2}}$

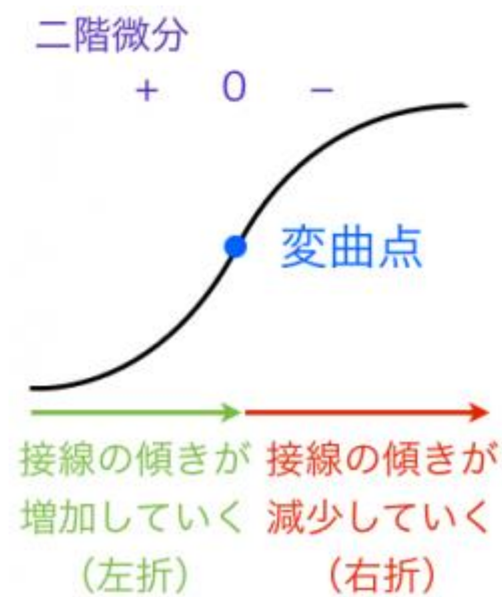
正規分布曲線の面積が1 になるように$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$で規格化し

平均値μに平行移動して　$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

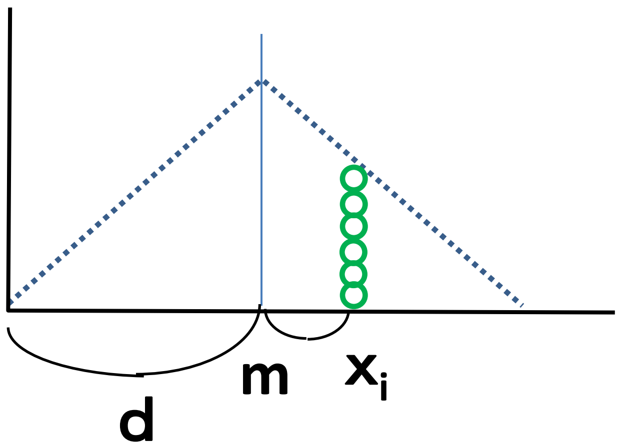
変曲点の座標は

$$\left(\mu\pm\sigma,\quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2}}\right)$$



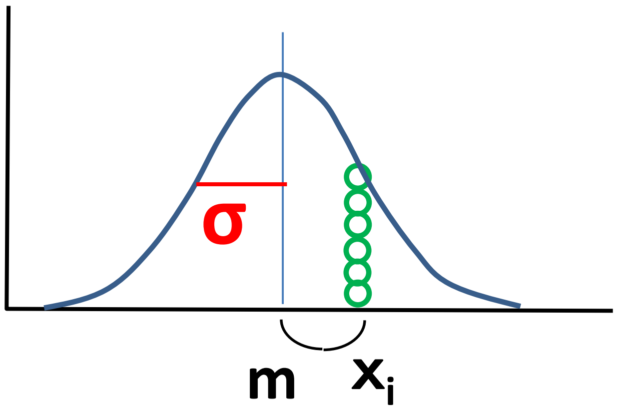


パラレル・ワールド



$$d \propto \sum_i |x_i - m|$$

現実社会



$$\sigma^2 = \sum_i (x_i - m)^2$$

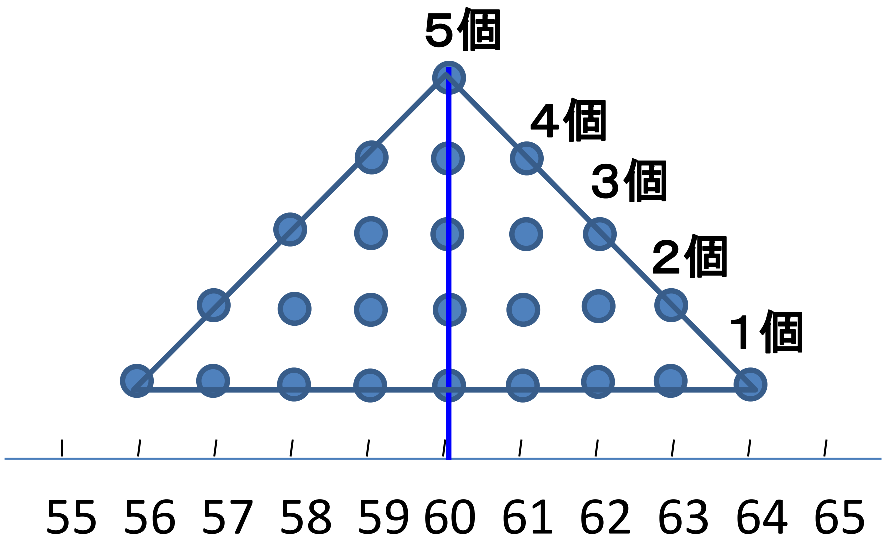
$$\sigma = \sum_i (x_i - m)$$

パラレル・ワールド

観測データa_iを集めて真値xを求める

$$\boxed{S=\sum_i x-a_i}$$

Sが最小になるxが真値



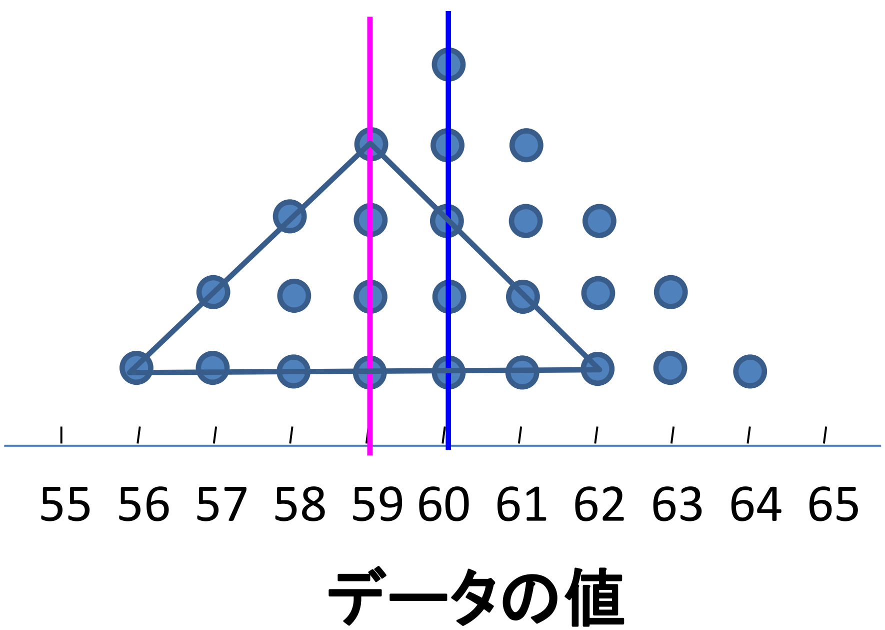
中心値を 60と正しく推理

$$|60-60|\times 5=0$$
$$|60-59|\times 4=4$$
$$|60-61|\times 4=4$$

.

+)

合計　40



中心値を 59と誤って推理

$$|59-60|\times 5=5$$
$$|59-59|\times 4=0$$
$$|59-61|\times 4=8$$

.

+)

合計　45

中心値の推理値x		合計
62	→	58
61	→	45
$\boxed{60}$	→	$\boxed{40}$
59	→	45
58	→	58

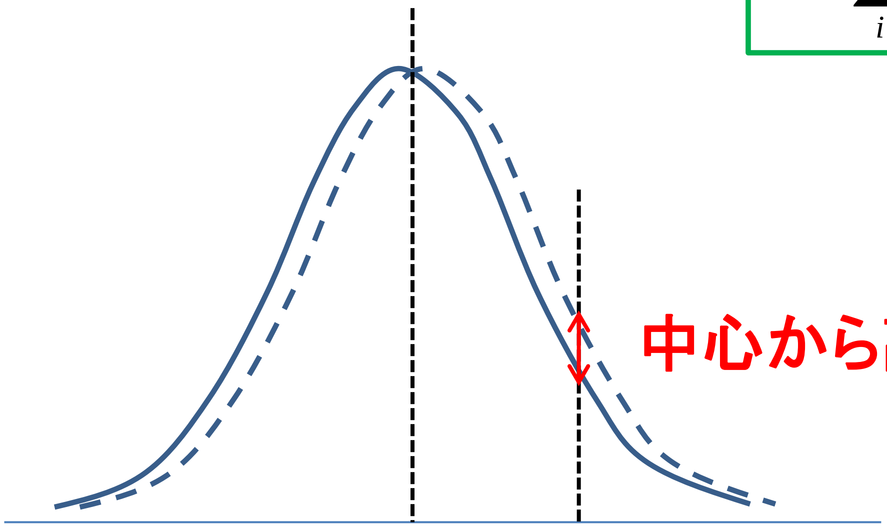
正しく推定した時に最小値

最小2乗法

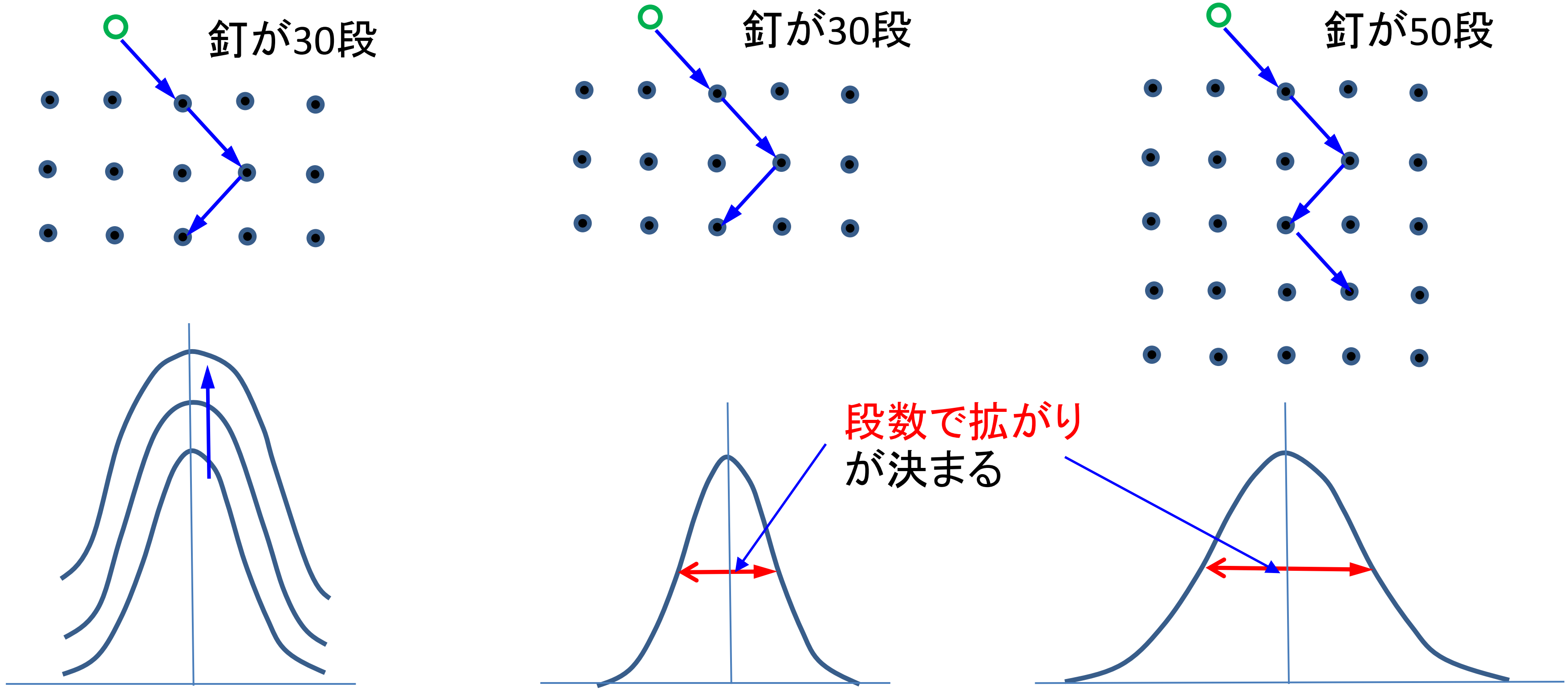
観測データa_iを集めて真値xを求める

$$S = \sum_i (x - a_i)^2$$

Sが最小になるxが真値



中心から離れた点では変化が大きい



長時間の場合は
高さが増大

トス数で拡がり
が決まる

コイン投げ（表+1、裏-1点）　50回1セット　+5　　500回1セット　+50

2セット　-3　　2セット　-30

・　　・

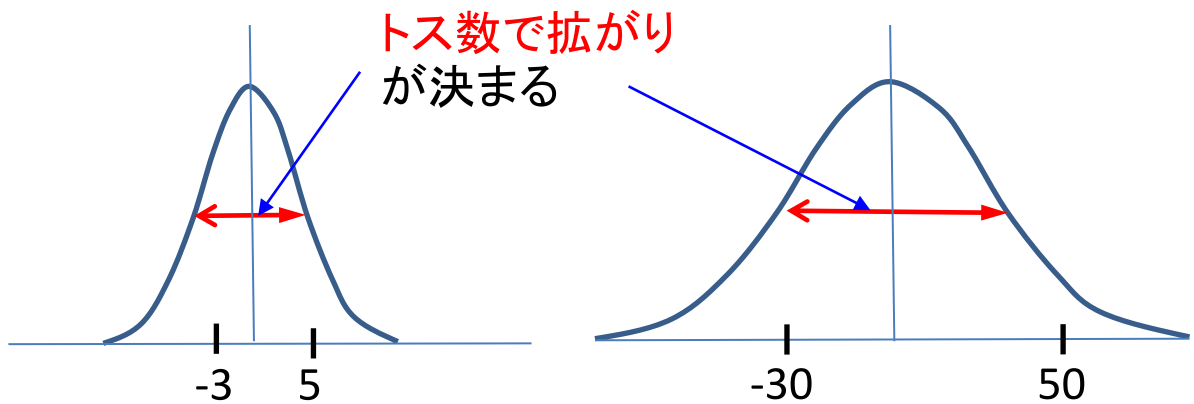
シンメトリー（対称）なので→　合計　0　　合計　0

コイン投げ（表+1、裏-1点）　50回1セット　+5　　　500回1セット　+50

2セット　-3　　　2セット　-30

・　　　・

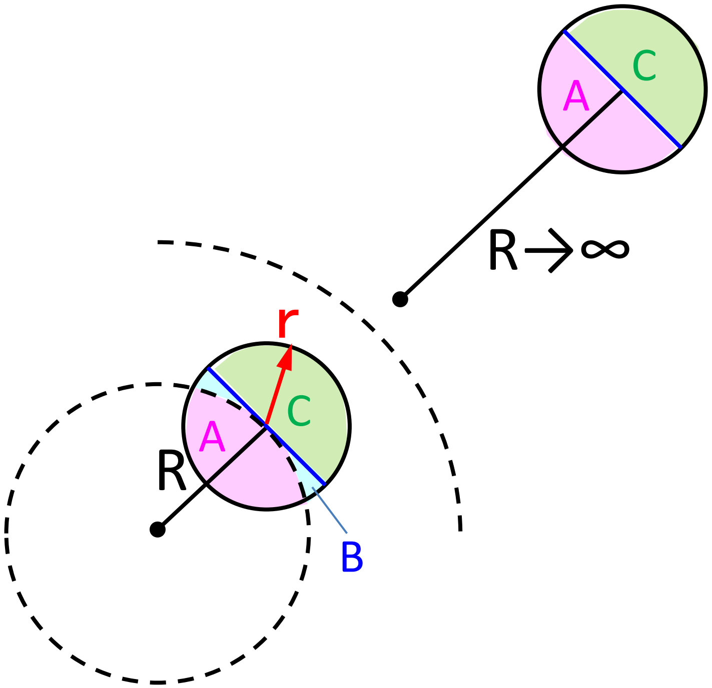
シンメトリー（対称）なので→　合計　0　　　合計　0

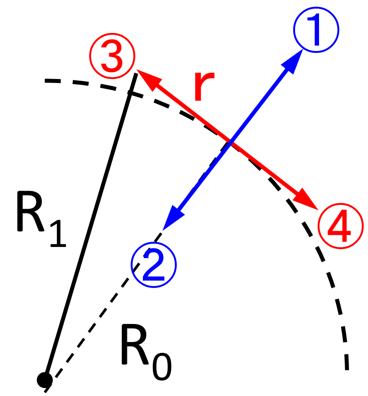


絶対値ゲームにする

コイン投げ（表+1、裏ー1点）　→　|+1|　＝+1　　|ー1|＝+1

合計　0　　　+〇〇



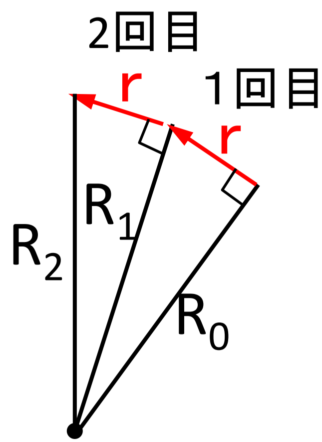


③と④は①と②の平均のベクトルで
Bに含まれているので、時間的と共に
半径はR_0、R_1と拡大していく。
①と②は行ったり帰ったりで相殺

Aの面積＜Bの面積+Cの面積
この分子は半径Rより外側に
移動する確率が高い

Rが無限大のとき　A=C

１回にBの面積だけ外に移動



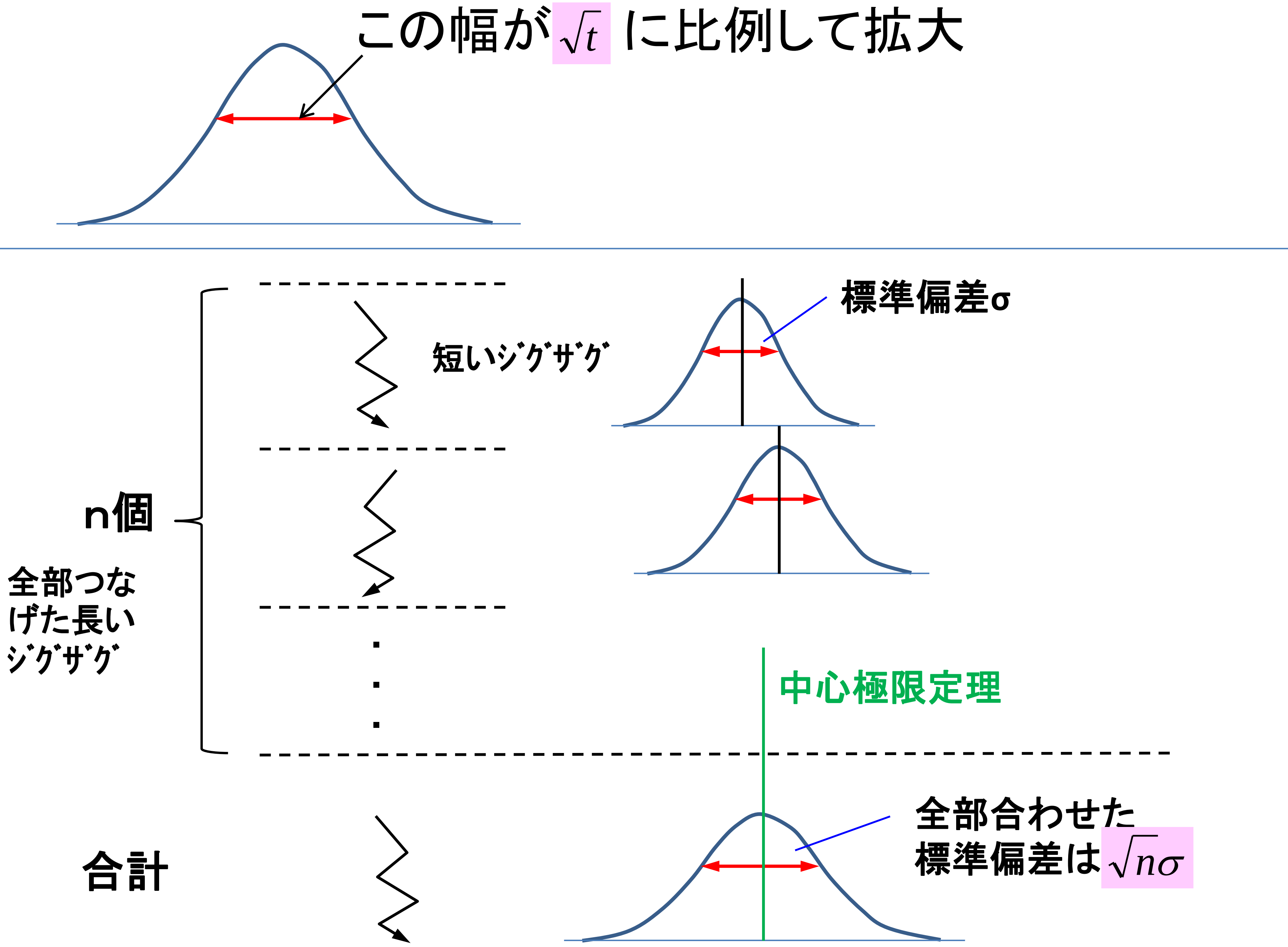
$$R_1 = \sqrt{R_0^{\ 2} + r^2} \qquad R_1^{\ 2} = R_0^{\ 2} + r^2$$

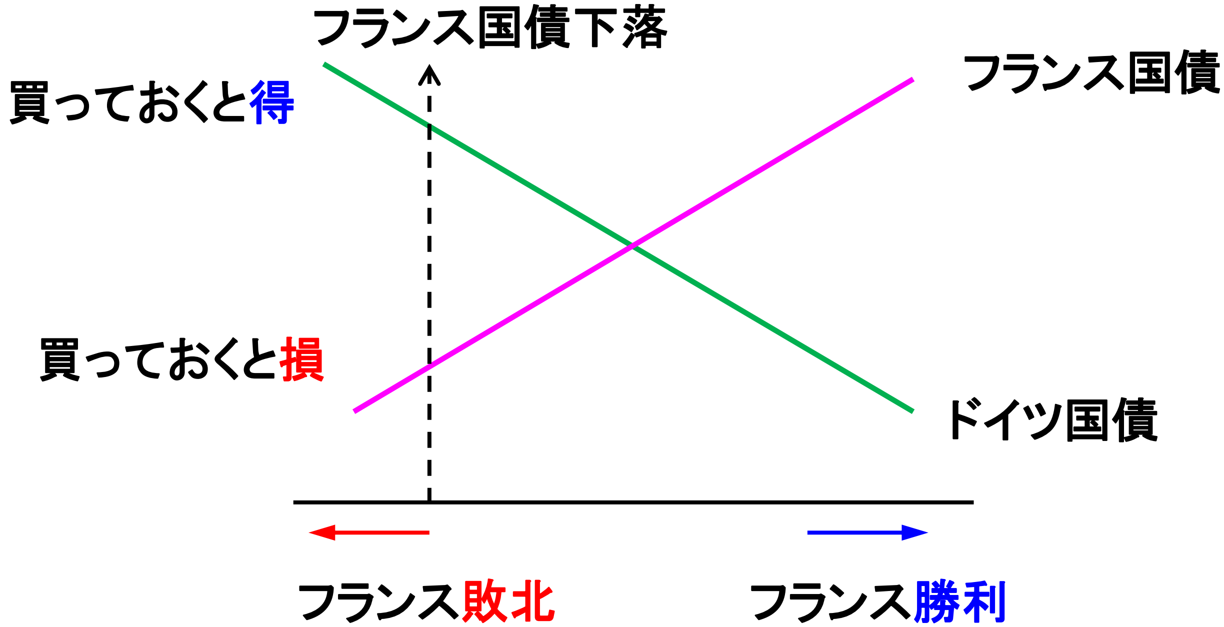
$$R_2^{\ 2} = R_1^{\ 2} + r^2 = R_0^{\ 2} + r^2 + r^2$$

$$R_t^{\ 2} = R_0^{\ 2} + tr^2 \qquad R_0^{\ 2} = 0 \quad \text{なので}$$

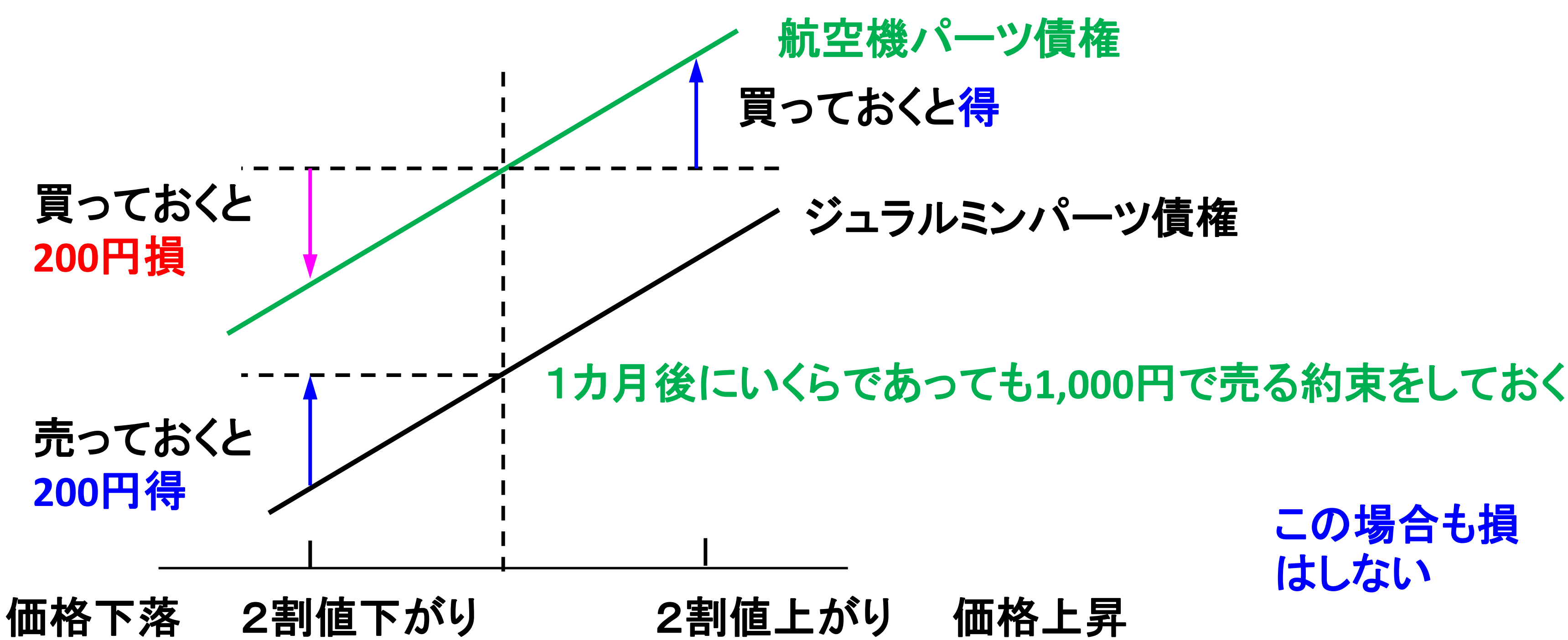
$$R_t^{\ 2} = tr^2 \qquad \therefore \quad R_t = \sqrt{t} \cdot r$$

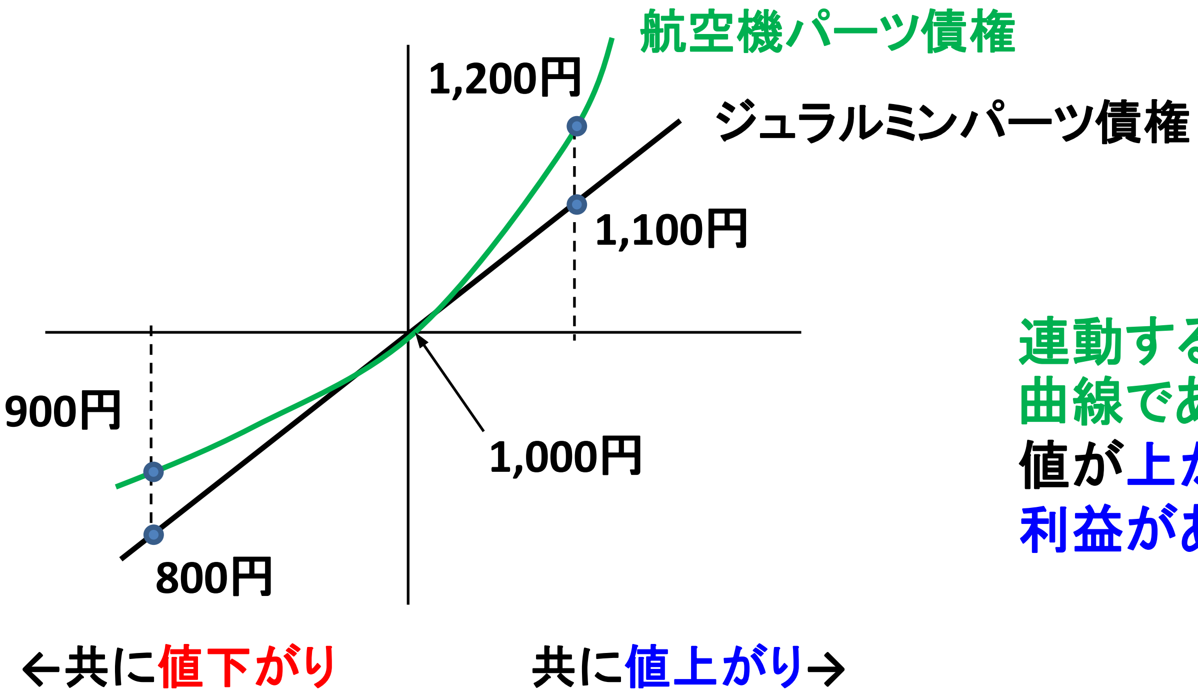
半径の拡散は $\sqrt{t}$ に比例する　**重要**


この幅が$\sqrt{t}$ に比例して拡大
標準偏差σ
短いジグザグ
n個
全部つなげた長いジグザグ
中心極限定理
合計
全部合わせた
標準偏差は$\sqrt{n}\sigma$



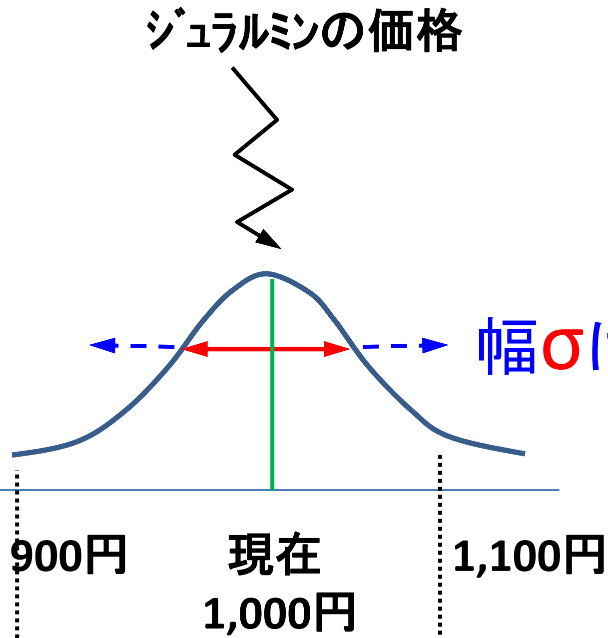
連動性が反対方向
↓
両方買っておくと
リスクはない





連動するが、片方が上向きの曲線であれば
値が上がっても下がっても利益がある

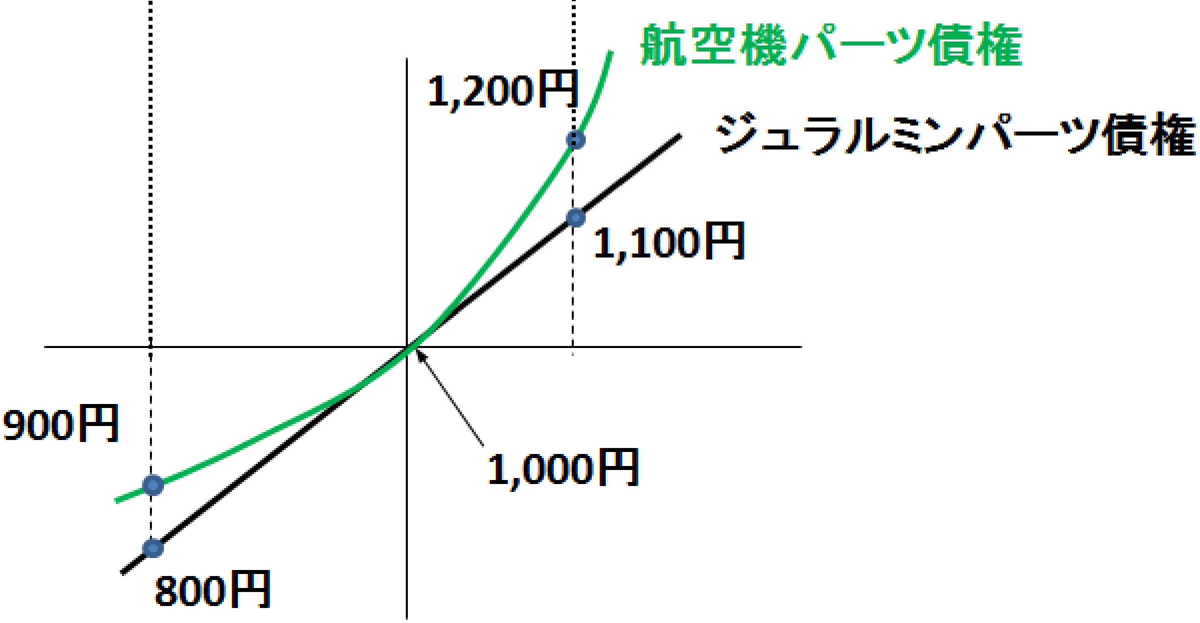
ブラック・ショールズ理論のイメージ



$$利益 \propto d^2 = \sigma^2 = (\sqrt{t})^2 = t$$

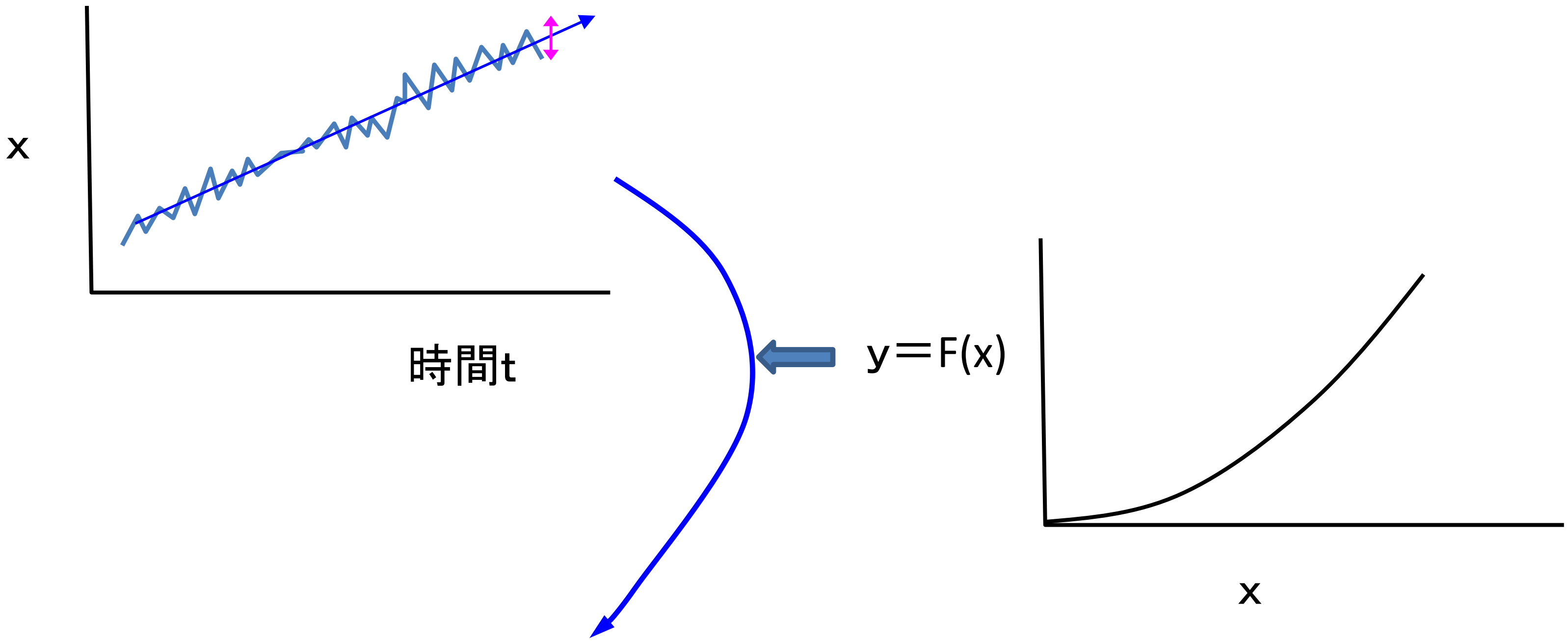
利益は時間tに比例して拡大

幅σは、時間tに対して $\sqrt{t}$ で拡大



$$dx = \underbrace{Adt}_{\text{トレンド}} + \underbrace{Bdw}_{\text{ボラティリティ(変動)}}$$

x : 変数　　A, Bは定数　　t : 時間　　w : ジグザグ運動



$$dy = A^{'}dt + B^{'}dw$$

- xと同じ式で書ける
- トレンドとボラティリティに分離できる