

この式変じゃない？ $1 + 2 + 3 + 4 + \dots = -\frac{1}{12}$

初項 1, 公比 x の無限等比級数はつぎの式となる.

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x} \quad (1)$$

この式が成り立つのは $|x| < 1$

$x = -1$ を代入すると,

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \frac{1}{2}$$

(1)の両辺を微分

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$x = -1$ を代入すると

$$1 - 2 + 3 - 4 + \dots = \frac{1}{4}$$

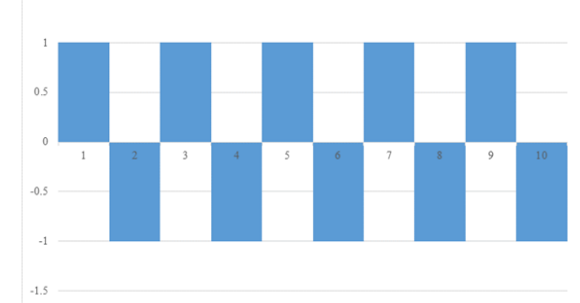
$$1 - 2 + 3 - 4 + \dots$$

$$= (1 + 2 + 3 + 4 + \dots) - 2 \times (2 + 4 + \dots)$$

$$= -3 \times (1 + 2 + 3 + 4 + \dots)$$

$$\zeta(-1) = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots = -\frac{1}{12}$$

出典: http://www.geocities.jp/x_seek/Euler.htm



和 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0
 $1-1$
 $1-1+1$

和は1と0交互になる
 ので平均で $\frac{1}{2}$?

$$S_1 = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 + \dots$$

$$\begin{aligned} 1 - S_1 &= 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 + \dots) \\ &= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 + \dots = S_1 \end{aligned}$$

$$2S_1 = 1 \quad S_1 = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 + \dots$$

$$S_2 = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 + \dots$$

$$2S_2 = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 + \dots = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \frac{1}{4}$$

$$S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots$$

$$\begin{aligned} -S_2 &= -[1 - 2 + 3 - 4 + 5 + \dots] \\ &= 4 + 8 + 12 + \dots \\ &= 4(1 + 2 + 3 + \dots) \end{aligned}$$

$$S - S_2 = 4S$$

$$-3S = S_2 = \frac{1}{4} \quad S = -\frac{1}{12}$$

ゼータ関数

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots$$

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\zeta(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^1} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = \infty$$

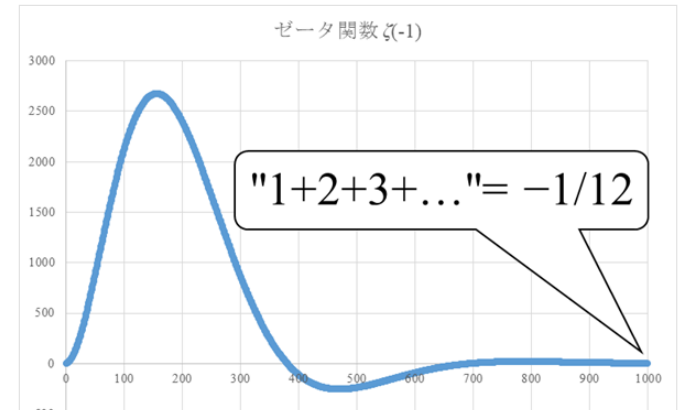
$$\zeta(-1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{-1}} = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots = -\frac{1}{12}$$

自明の零点

$$\zeta(-2) = \zeta(-4) = \zeta(-6) = \zeta(-8) \dots = 0$$

出典: http://www.geocities.jp/x_seek/Euler.htm

振動しているなんてズルい



$$"1+2+3+4+\dots" := \lim_{x \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{\infty} k e^{-kx} \cos(kx)$$



リーマン予想

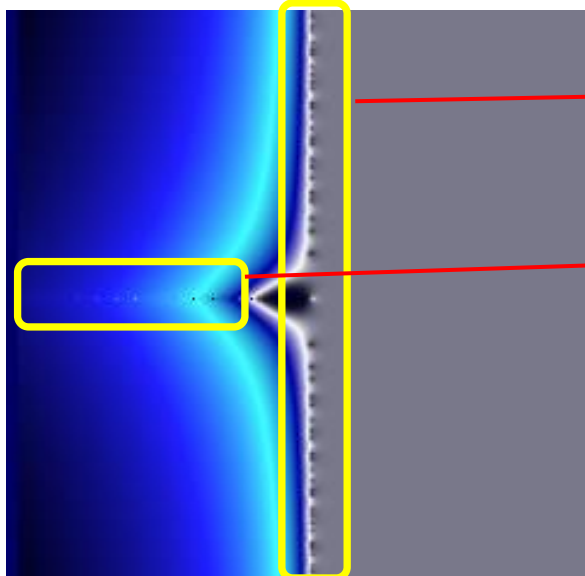
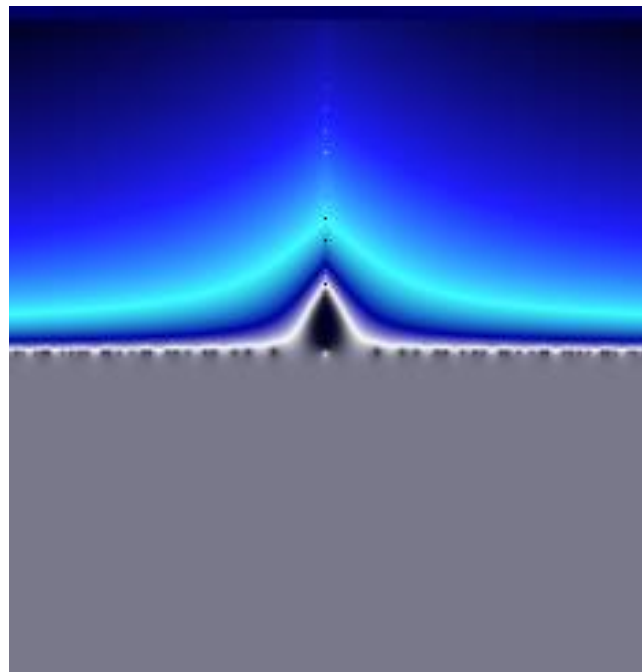
複素平面上で

Sがマイナスの偶数値

実数部が $\frac{1}{2}$ の直線上に零点があると予想
(自明でない零点)

出典: <http://club.informatix.co.jp/?p=4261>

90° 回転



リーマンゼータの生息域

複素数平面

$\zeta(s)$

臨界直線 $\text{Re}(s) = \frac{1}{2}$

臨界領域

• 自明でない零点

• 自明な零点

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) = 0$$

