Excelを用いた熱流体シミュレーション その１

2016.7.26

熱流体シミュレーションを実施するために

時間変化がある

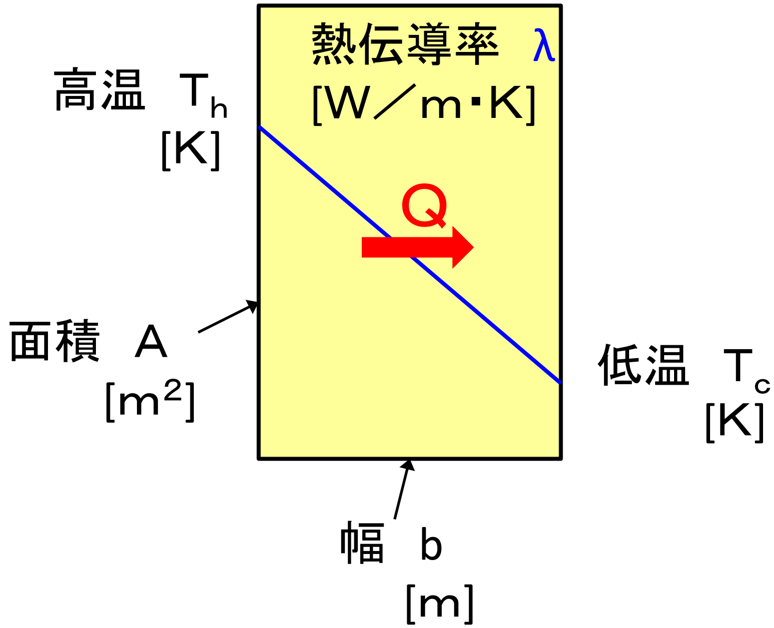
１．熱伝導のパラメータを知る
２．差分式の概念を知る
３．熱伝導の形態を知る
　・定常か？　非定常化か？
　・一次元か？　二次元か？　3次元か？
　・熱伝導のみ、対流の有無、流体の流れ有無
　　ふく射伝熱、融解・凝固、特殊
４．境界値、特異点について
５．Excelの使い方
６．事例

1. 熱伝導のパラメータを知る

定常一次元

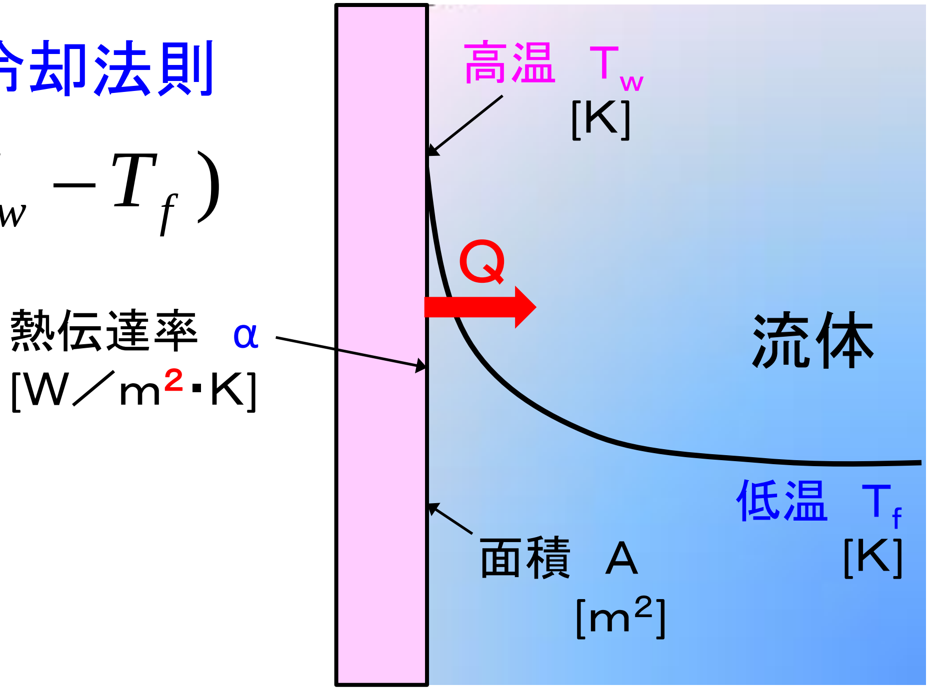
フーリエの法則

$$Q = A\lambda \frac{(T_h - T_c)}{b}$$



ニュートンの冷却法則

$$Q = A\alpha(T_w - T_f)$$



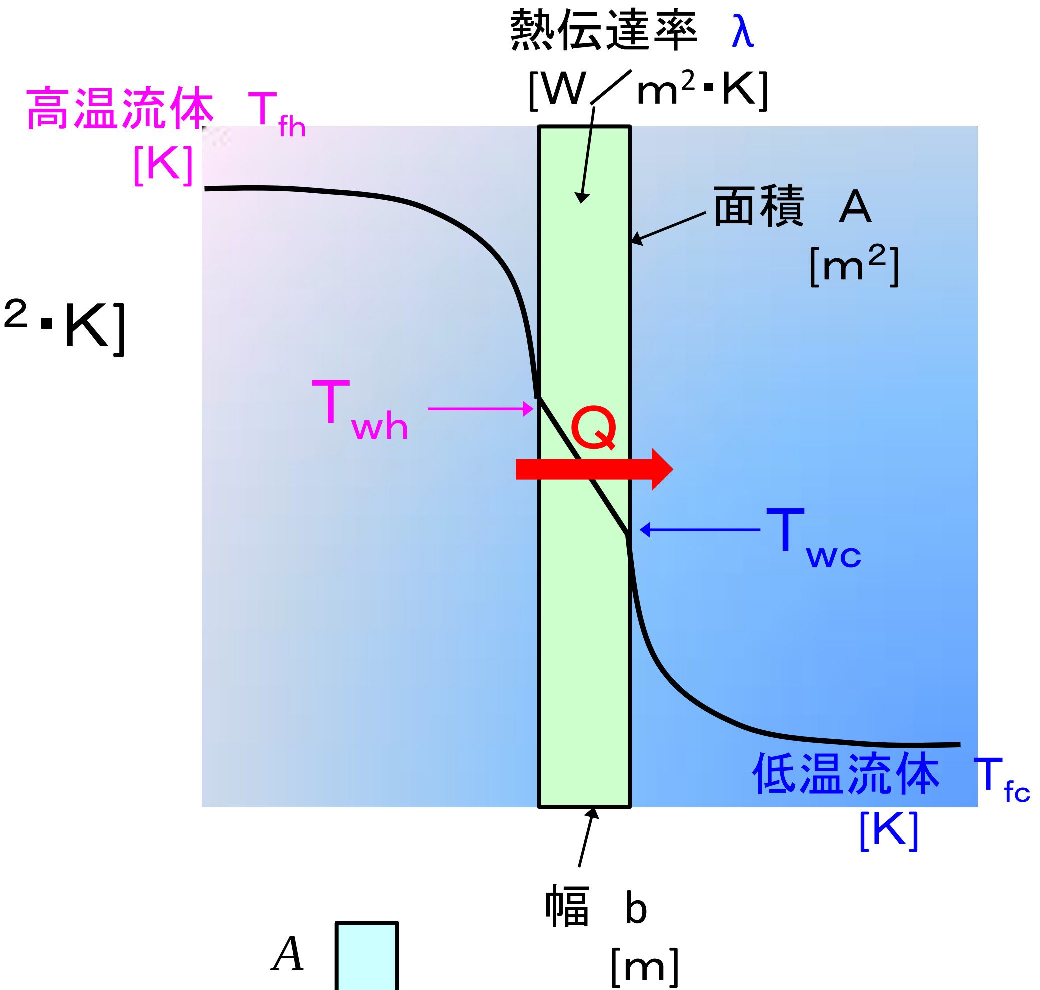
対流

定常一次元

$$Q = Ak(T_{fh} - T_{fc})$$

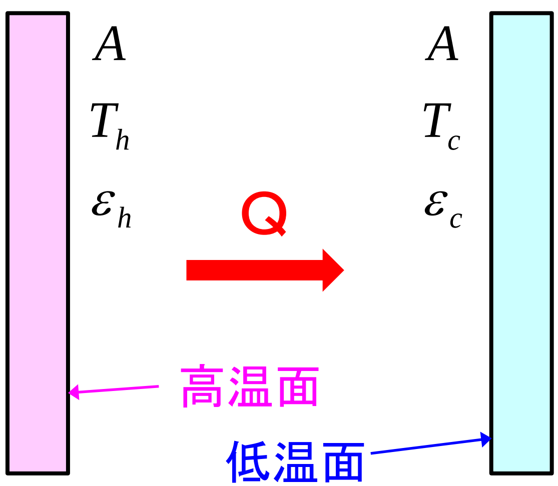
k:総括伝熱係数　[W／m²･K]

$$k = \frac{1}{\underbrace{\frac{1}{a_h} + \frac{b}{\lambda} + \frac{1}{a_c}}_{\text{抵抗}}}$$



ふく射伝熱

$$Q = A\sigma \frac{(T_h^{\ 4} - T_c^{\ 4})}{\frac{1}{\varepsilon_h} + \frac{1}{\varepsilon_c} - 1}$$



２. 差分式の概念を知る

ラプラシアン

物理現象では「私は周囲の平均でいたい！」という方向に力が働く

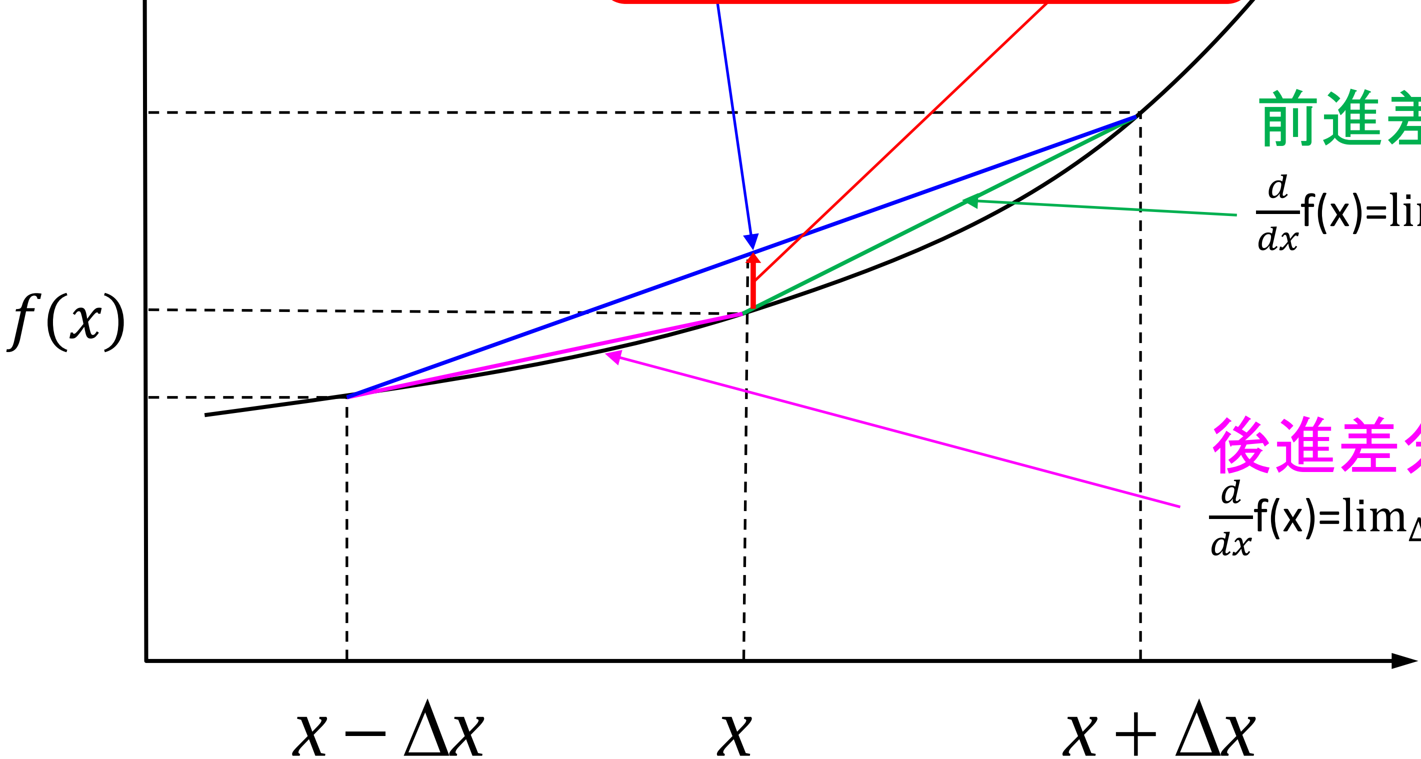
→熱伝導方程式では、「周囲温度の平均が私の温度」

$$\frac{d^2}{dx^2}\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} - \dfrac{f(x)-f(x-\Delta x)}{\Delta x}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-2f(x)+f(x-\Delta x)}{(\Delta x)^2}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2}{(\Delta x)^2}\left(\frac{f(x+\Delta x)+f(x-\Delta x)}{2} - f(x)\right)$$

この曲線がゴムでできているとしたら赤い矢印のような復元力がラプラシアン



前進差分

$$\frac{d}{dx}\mathrm{f}(\mathrm{x})=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

後進差分

$$\frac{d}{dx}\mathrm{f}(\mathrm{x})=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)-f(x-\Delta x)}{\Delta x}$$

式の導出

f(x)のテイラー展開

$$f(x+\Delta x) = f(x) + \Delta x \cdot \frac{d}{dx} f(x) + \frac{\Delta x^2}{2} \cdot \frac{d^2}{dx^2} f(x) + \frac{\Delta x^3}{6} \cdot \frac{d^3}{dx^3} f(x) + \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$f(x-\Delta x) = f(x) - \Delta x \cdot \frac{d}{dx} f(x) + \frac{\Delta x^2}{2} \cdot \frac{d^2}{dx^2} f(x) - \frac{\Delta x^3}{6} \cdot \frac{d^3}{dx^3} f(x) + \cdot\ \cdot\ \cdot$$

両辺加えて

$$f(x+\Delta x) + f(x-\Delta x) = 2f(x) + \Delta x^2 \cdot \frac{d^2}{dx^2} f(x) + O(\Delta x^4)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} f(x) = \frac{f(x+\Delta x) - 2f(x) + f(x-\Delta x)}{\Delta x^2}$$

引いて

$$f(x+\Delta x) - f(x-\Delta x) = 2\Delta x \cdot \frac{d}{dx} f(x) + O(\Delta x^3)$$

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{f(x+\Delta x) - f(x-\Delta x)}{2\Delta x}$$

境界条件

第１種境界（ﾃﾞｨﾘｸﾚ）条件

温度

$$T\big|_{x=w} = T_w$$

X＝W

第２種境界（ﾉｲﾏﾝ）条件

熱流束

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x=w} = q_w$$

λ：熱伝導率

X＝W

$$\frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x=w} = 0$$

断熱条件

X＝W

第３種境界条件

熱伝達

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x=w} = \alpha\left(T\big|_{x=w} - T_f\right)$$

α：熱伝達率

T_f：流体温度

X＝W

第４種境界条件

接触面温度と熱流束

接触抵抗なし

$$T_1\big|_{x=w} = T_2\big|_{x=w}$$

$$-\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x}\bigg|_{x=w} = -\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x}\bigg|_{x=w}$$

X＝W

接触抵抗あり

$$T_1\big|_{x=w}$$

$$T_2\big|_{x=w}$$

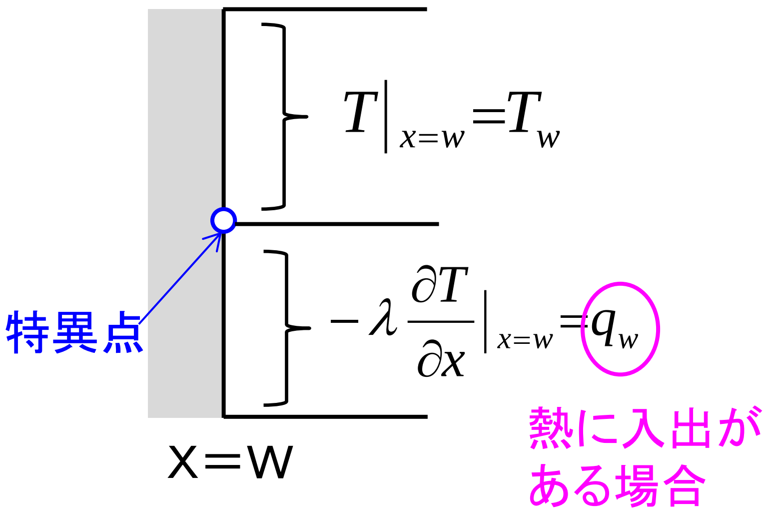
$$-\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x}\bigg|_{x=w} = h_c\left(T_1\big|_{x=w} - T_2\big|_{x=w}\right)$$

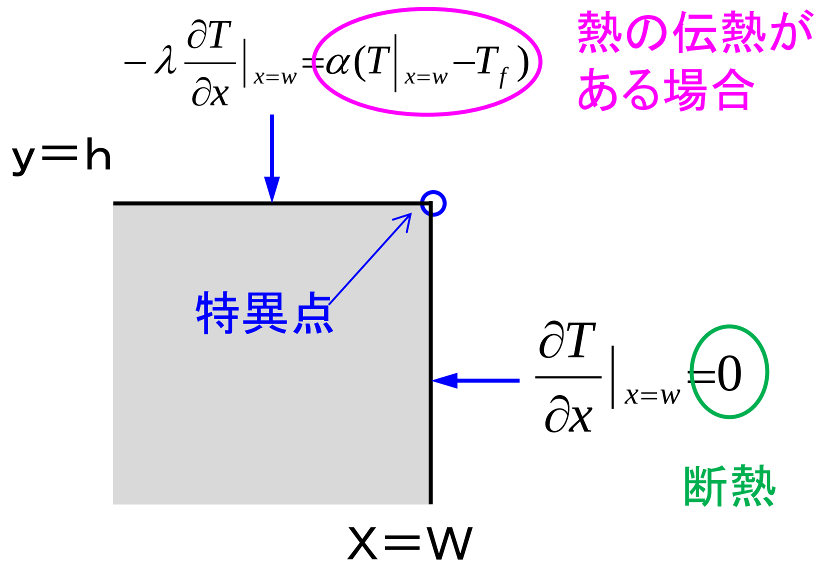
$$-\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x}\bigg|_{x=w} = h_c\left(T_1\big|_{x=w} - T_2\big|_{x=w}\right)$$

h_c：接触熱ｺﾝﾀﾞｸﾀﾝｽ

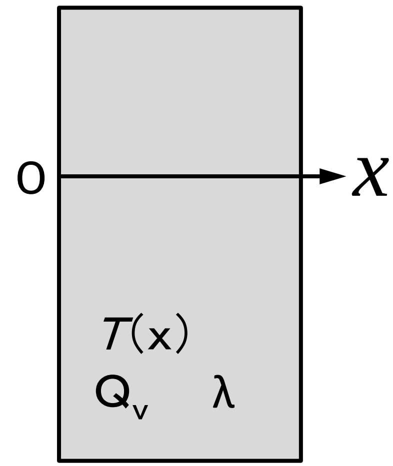
X＝W

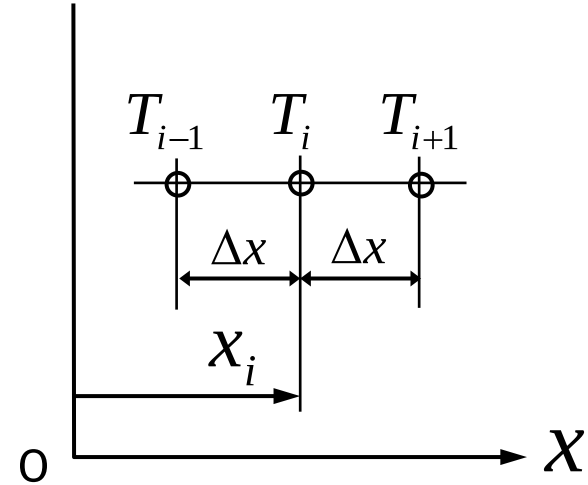
境界値が変化する**特異点**を設定する





定常一次元（等メッシュ）





基礎方程式

$$\boxed{\frac{d^2T}{dx^2}} + \frac{Q_v}{\lambda} = 0$$

差分式

$$\frac{dT}{dx} = \frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta x} \quad \text{あるいは} \quad \frac{dT}{dx} = \frac{T_i - T_{i-1}}{\Delta x}$$

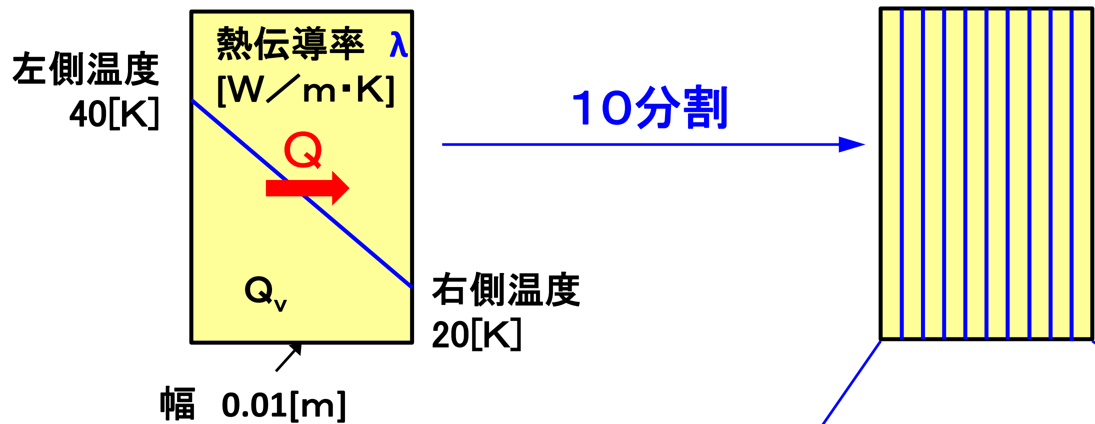
$$\boxed{\frac{d}{dx}\left\{\frac{(T_{i+1} - T_i) - (T_i - T_{i-1})}{\Delta x}\right\}} + \frac{Q_v}{\lambda} = 0$$

$$\frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\Delta x^2} + \frac{Q_v}{\lambda} = 0$$

$$T_i = \frac{1}{2}\left(T_{i+1} + T_{i-1} + \frac{Q_v}{\lambda}\Delta x^2\right)$$

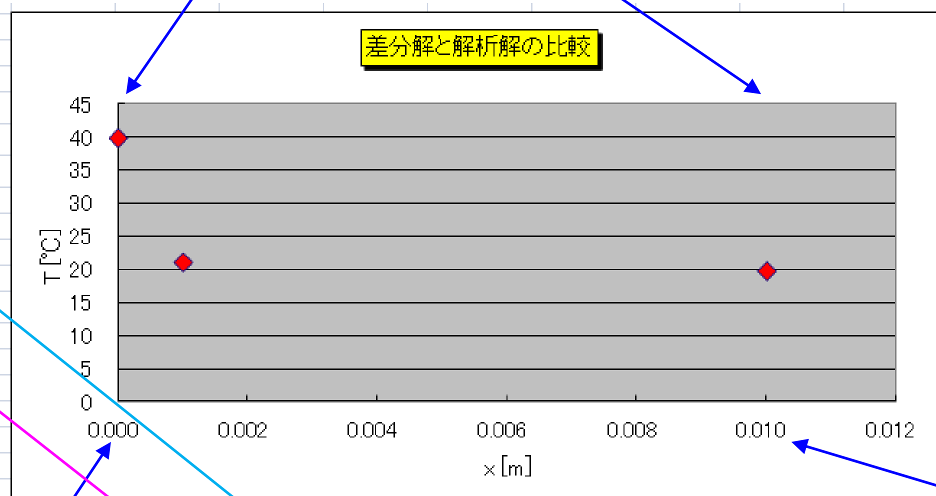
事例1　定常一次元（等メッシュ）

ファイル名：　excel 301.xls



平　板	
厚さ b [m]	0.01
熱伝導率 λ [W/(m·K)]	20
発熱/吸熱量 Q_v [W/m^3]	5.00E+07
左面温度 T_0 [℃]	40
右面温度 T_b [℃]	20
x方向の分割数 N [-]	10
x方向のメッシュ幅 Δx [m]	0.001

定　数	
(1/2)(Q_v/λ) [K/m^2]	1.25E+06



	x [m]	0.000	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009	0.010
T [℃]	差分解	40.0	21.3									20.0
	解析解	40.0										

=(E22+G22)/2+$C$12*$C$9^2

差分式　$$T_i = \frac{1}{2}\left(\boxed{T_{i+1}} + \boxed{T_{i-1}} + \boxed{\frac{Q_v}{\lambda}}\boxed{\Delta x^2}\right)$$

事例1　定常一次元(等メッシュ)

計算式をドラッグしてコピーする前に、以下の設定を確認しないとエラーが出ます

①左上のOffceボタンクリック

②「Excelのオプション」クリック

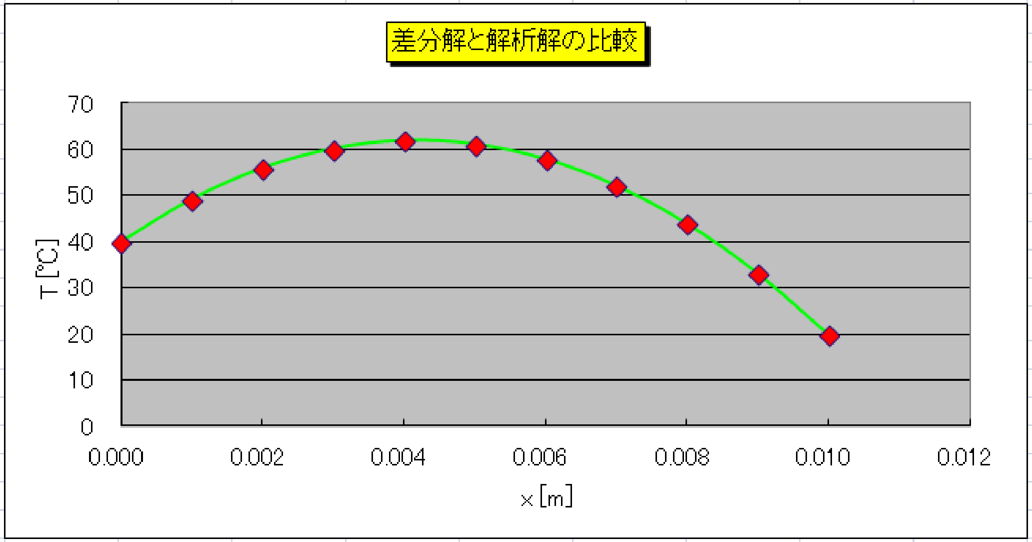
③「数式」クリック

④「計算方法の設定」の中の「反復計算を行う」のチェックボックスにレ点

「最大反復回数」を100、「変化の最大値」を0.001に設定

平　板	
厚さ b [m]	0.01
熱伝導率 λ [W/(m·K)]	20
発熱/吸熱量 Q_v [W/m^3]	5.00E+07
左面温度 T_a [℃]	40
右面温度 T_b [℃]	20
x方向の分割数 N [-]	10
x方向のメッシュ幅 Δx [m]	0.001

定　数	
$(1/2)(Q_v/\lambda)$ [K/m^2]	1.25E+06

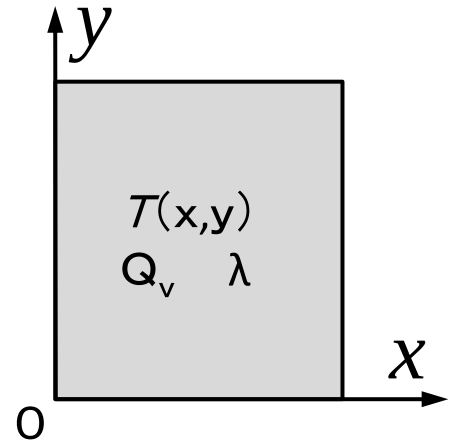


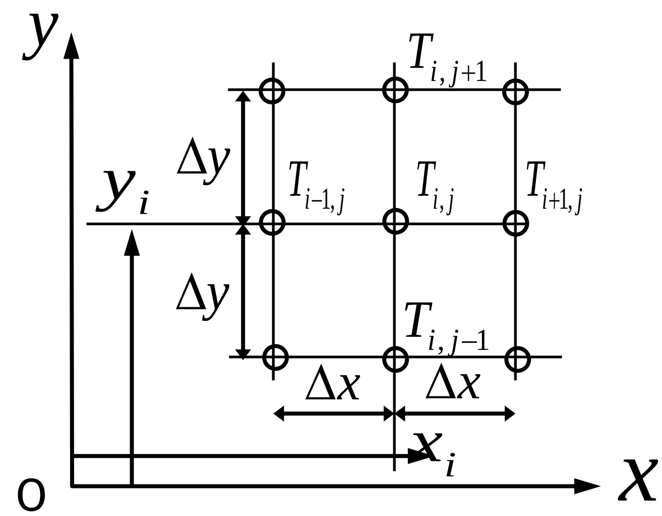
	x [m]	0.000	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009	0.010
T [℃]	差分解	40.0	49.2	56.0	60.2	62.0	61.2	58.0	52.2	44.0	33.2	20.0
	解析解	40.0	49.3	56.0	60.3	62.0	61.3	58.0	52.3	44.0	33.3	20.0

定常二次元

基礎方程式

$$\frac{d^2T}{dx^2}+\frac{d^2T}{dy^2}+\frac{Q_v}{\lambda}=0$$





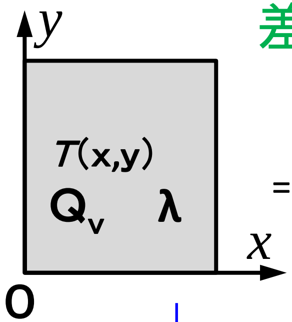
差分式

$$\frac{T_{i+1,j}-2T_{i,j}+T_{i-1,j}}{\Delta x^2}+\frac{T_{i,j+1}-2T_{i,j}+T_{i,j-1}}{\Delta y^2}+\frac{Q_v}{\lambda}=0$$

$$T_{i,j}=\frac{1}{2(\Delta x^2+\Delta y^2)}\left\{(T_{i+1,j}+T_{i-1,j})\Delta y^2+(T_{i,j+1}+T_{i,j-1})\Delta x^2+\Delta x^2\Delta y^2\frac{Q_v}{\lambda}\right\}$$

事例2　定常二次元

ファイル名：　excel 302.xls

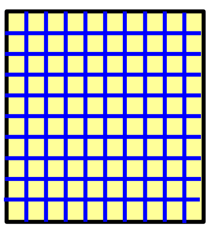


差分式

$$T_{i,j} = \frac{1}{2(\Delta x^2 + \Delta y^2)} \left\{ \left(\boxed{T_{i+1,j}} + \boxed{T_{i-1,j}} \right) \Delta y^2 + \left(\boxed{T_{i,j+1}} + \boxed{T_{i,j-1}} \right) \Delta x^2 + \Delta x^2 \Delta y^2 \frac{Q_v}{\lambda} \right\}$$

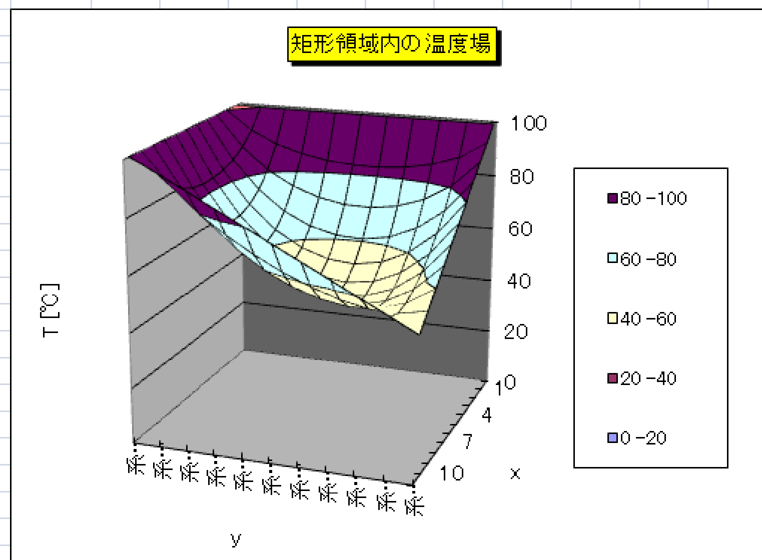
=((G5+I5)*$D$8^2+(H6+H4)*$D$5^2+($D$10/$D$9)*$D$5^2*$D$8^2)/(2*($D$5^2+$D$8^2))

x、y
10分割

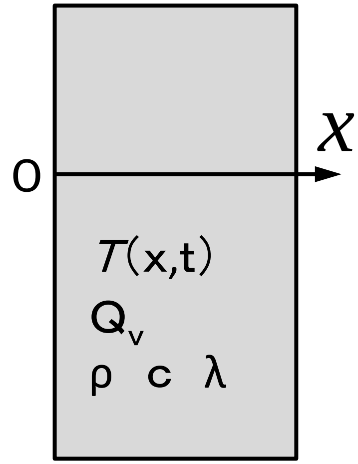


矩　形　領　域	
x方向長さ b [m]	0.01
x方向分割数 N_x [−]	10
x方向のメッシュ幅 Δx [m]	0.001
y方向長さ h [m]	0.01
y方向分割数 N_y [−]	10
y方向のメッシュ幅 Δy [m]	0.001
熱伝導率 λ [W/(m·K)]	0.2
発熱、吸熱量 Q_v [W/m^3]	−1000000

y [mm]											
10.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
9.0	100.0	93.1	88.7	85.8	84.0	83.1	83.0	83.8	85.7	89.1	95.0
8.0	100.0	88.7	80.9	75.5	72.1	70.3	70.1	71.5	74.9	80.7	90.0
7.0	100.0	85.8	75.5	68.3	63.6	61.1	60.6	62.3	66.5	73.8	85.0
6.0	100.0	84.0	72.1	63.6	57.9	54.7	53.9	55.6	60.1	68.0	80.0
5.0	100.0	83.1	70.3	61.1	54.7	50.9	49.7	51.1	55.3	63.1	75.0
4.0	100.0	83.0	70.1	60.6	53.9	49.7	47.9	48.6	52.1	59.0	70.0
3.0	100.0	83.8	71.5	62.3	55.6	51.1	48.6	48.3	50.5	55.8	65.0
2.0	100.0	85.7	74.9	66.5	60.1	55.3	52.1	50.5	50.9	53.7	60.0
1.0	100.0	89.1	80.7	73.8	68.0	63.1	59.0	55.8	53.7	53.1	55.0
0.0	100.0	95.0	90.0	85.0	80.0	75.0	70.0	65.0	60.0	55.0	50.0
	0.0	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0	x [mm]



非定常一次元

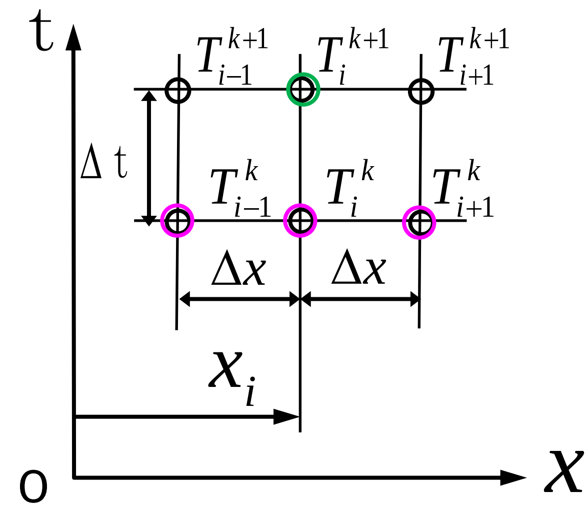


基礎方程式

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{Q_v}{\rho c}$$

差分式

陽解法

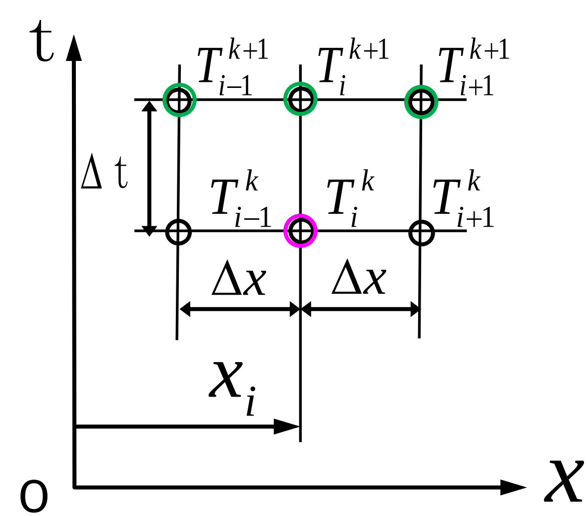


$$\frac{T_{i+1}^k - T_i^k}{\Delta t} = a\frac{T_{i+1}^k - 2T_i^k + T_{i-1}^k}{\Delta x^2} + \frac{Q}{\rho c}$$

$$T_i^{k+1} = c_x (T_{i+1}^k + T_{i-1}^k) + (1 - 2c_x) T_i^k + c_q Q_v$$

ここで、$c_x = \frac{a\Delta t}{\Delta x^2}$ $\quad c_q = \frac{\Delta t}{\rho c}$

陰解法



$$\frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\Delta t} = a\frac{T_{i+1}^{k+1} - 2T_i^{k+1} + T_{i-1}^{k+1}}{\Delta x^2} + \frac{Q_v}{\rho c}$$

$$T_i^{k+1} = \frac{1}{1+2c_x}\left\{c_x (T_{i+1}^{k+1} + T_{i-1}^{k+1}) + T_i^k + c_q Q_v\right\}$$

ここで、$a = \frac{\lambda}{\rho c}$ $\quad c_x = \frac{a\Delta t}{\Delta x^2}$ $\quad c_q = \frac{\Delta t}{\rho c}$

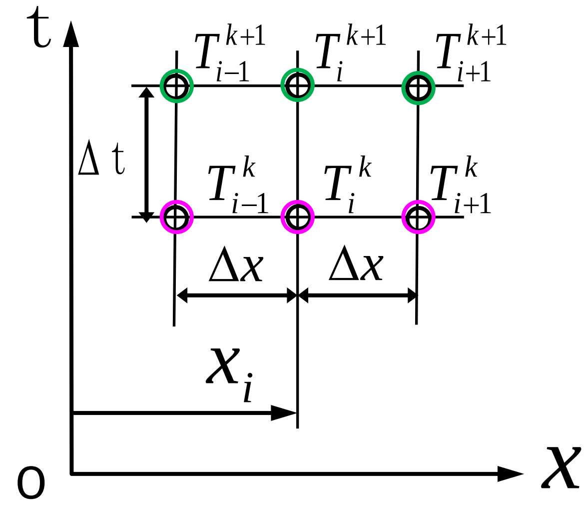
非定常一次元

Crank-Nicolson法

$$\frac{T_i^{k+1}-T_i^k}{\Delta t}=\frac{a}{2}\left(\frac{T_{i+1}^{k+1}-2T_i^{k+1}+T_{i-1}^{k+1}}{\Delta x^2}+\frac{T_{i+1}^{k}-2T_i^{k}+T_{i-1}^{k}}{\Delta x^2}\right)+\frac{Q_v}{\rho c}$$

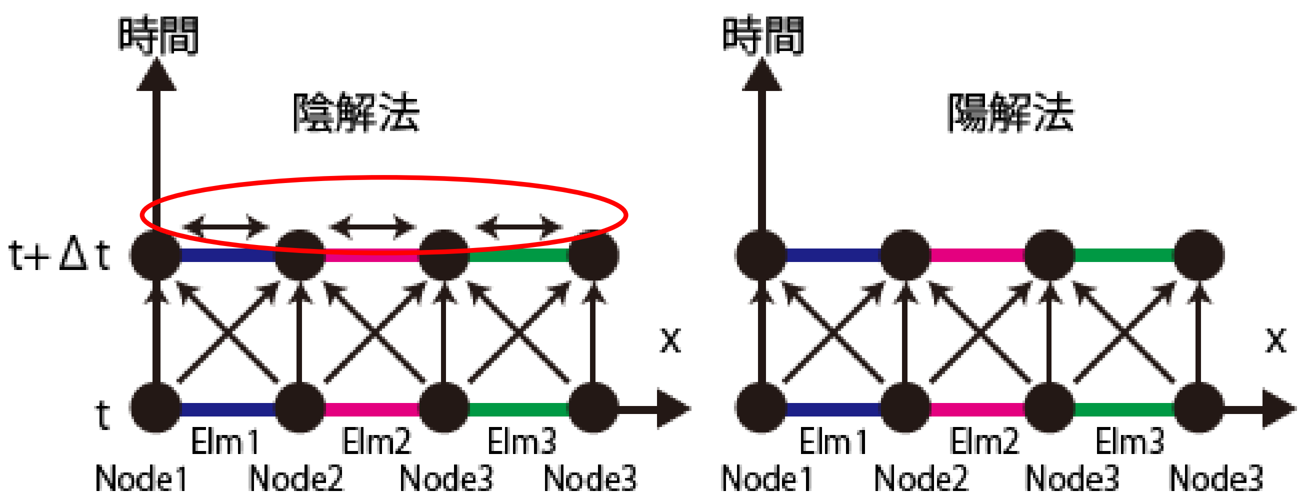
$$T_i^{k+1}=\frac{1}{2(1+c_x)}\left\{c_x(T_{i+1}^{k+1}+T_{i-1}^{k+1}+T_{i+1}^{k}+T_{i-1}^{k})+2(1-c_x)T_i^k+2c_qQ_v\right\}$$

ここで、$a=\dfrac{\lambda}{\rho c}$ $\quad c_x=\dfrac{a\Delta t}{\Delta x^2}$ $\quad c_q=\dfrac{\Delta t}{\rho c}$



陽解法と陰解法

	陰解法	陽解法
適用	静的、準静的な問題、動的な問題でも比較的長い周期で振動するような問題の解析に適	衝突、落下問題などの非線形性が強く、非常に短い時間で起こる現象の解析に適
時間	時間増分を大きくしても安定して解を得る	発散し易い クーラン条件を満足するような時間増分に設定する必要
計算量	連立方程式を解く必要があるため、1時間増分当たりの計算量が多い	連立方程式を解かないため、1時間増分当たりの計算量が少ない
メモリー	陽解法に比べて大きなメモリ容量が必要	陰解法に比べて小さなメモリ容量で済む



事例3　非定常一次元

基礎方程式

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{d^2T}{dx^2} \qquad a = \frac{\lambda}{\rho c}:\ \text{温度伝導率}$$

無次元化

フーリエ数

$$\theta = \frac{(T - T_\infty)}{(T_h - T_\infty)} \qquad F_o = \frac{at}{b^2} \qquad X = \frac{x}{b}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial F_0} = a\frac{d^2\theta}{dX^2}$$

初期条件及び境界条件

t=0、0≦x≦bで　$T=T_\infty$
t>0、x=0で　$T_0=T_h$
t>0、x=bで　$T_b=T_\infty$

$F_0=0$、0≦X≦1で　θ=0
$F_0>0$、X=0で　$\theta_0=1$
$F_0>0$、X=1で　$\theta_b=0$

$$\frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\Delta t} = a\frac{T_{i+1}^{k+1} - 2T_i^{k+1} + T_{i-1}^{k+1}}{\Delta x^2} + \frac{Q_v}{\rho c}$$

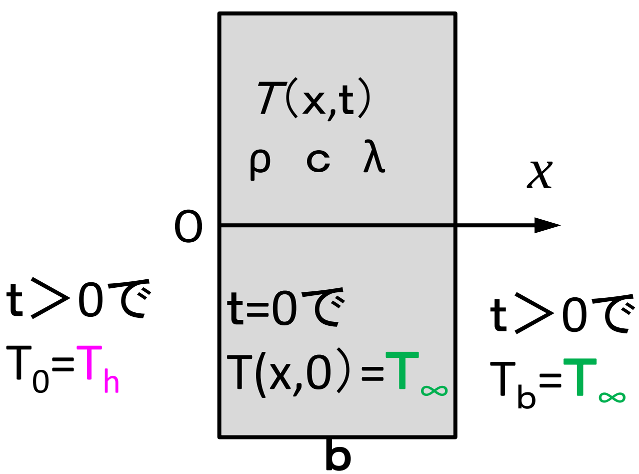
$$\frac{\theta_i^{k+1} - \theta_i^k}{\Delta F_0} = \frac{\theta_{i+1}^{k+1} - 2\theta_i^{k+1} + \theta_{i-1}^{k+1}}{\Delta X^2}$$

$$T_i^{k+1} = \frac{1}{1+2c_x}\left\{c_x(T_{i+1}^{k+1} + T_{i-1}^{k+1}) + T_i^k + c_q Q_v\right\}$$

ここで、$a = \dfrac{\lambda}{\rho c} \quad c_x = \dfrac{a\Delta t}{\Delta x^2} \qquad c_q = \dfrac{\Delta t}{\rho c}$

$$\theta_i^{k+1} = \frac{c_x}{1+2c_x}\left\{(\theta_{i+1}^{k+1} + \theta_{i-1}^{k+1}) + (\frac{1}{c_x})\theta_i^k\right\}$$

ここで、$c_x = \dfrac{\Delta F_0}{\Delta X^2} = \dfrac{a\Delta t}{\Delta x^2}$



$F_0=0$、$0≦X_i≦1$で　$\theta_i^0=0$
$F_0>0$、$X_0=0$で$\theta_0^k=1$
$F_0>0$、$X_M=1$で$\theta_M^k=0$　（Mは分割数）

事例3　非定常一次元

ファイル名：　excel 303.xls

$$\theta_i^{k+1} = \frac{c_x}{1+2c_x}\left\{(\theta_{i+1}^{k+1}+\theta_{i-1}^{k+1})+(\frac{1}{c_x})\theta_i^k\right\}$$

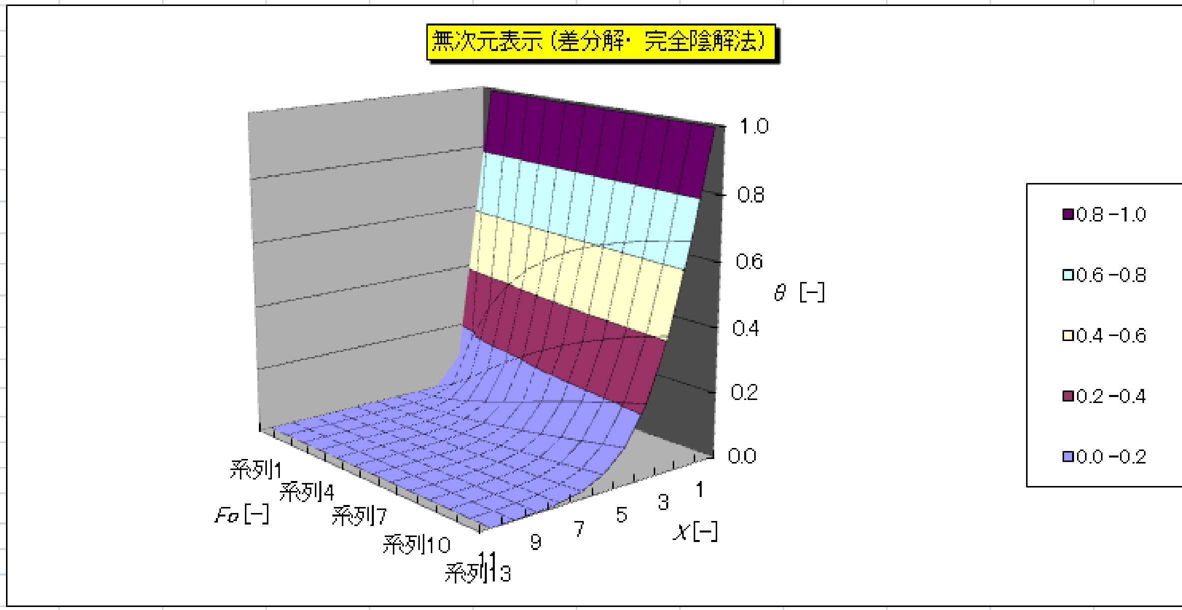
$$\text{ここで、}c_x = \frac{\Delta F_0}{\Delta X^2} = \frac{a\Delta t}{\Delta x^2}$$

=($\boxed{\text{\$C\$22}}$/(1+2*$\boxed{\text{\$C\$22}}$))*($\boxed{\text{F27}}$+$\boxed{\text{H27}}$+(1/$\boxed{\text{\$C\$22}}$)*$\boxed{\text{G26}}$)

平　板	
厚さ b [m]	0.01
比熱 c [J/(kg·K)]	200
密度 ρ [kg/m^3]	9500
熱伝導率 λ [W/(m·K)]	50
初期温度 $T = T_\infty$ [℃]	20
左面温度 $T_a = T_h$ [℃]	100
右面温度 $T_b = T_\infty$ [℃]	20
温度伝導率 $a = \lambda/(\rho \cdot c)$ [m^2/s]	2.63E-05
無次元初期温度 θ_∞ [-]	0
無次元左面温度 θ_a [-]	1
無次元右面温度 θ_b [-]	0
無次元座標 X 方向の分割数 M [-]	10
無次元座標 X方向のメッシュ幅 ΔX [-]	0.1

その他	
時間ステップ Δt [s]	0.01
無次元時間ステップ $\Delta Fo = a\Delta t / b^2$ [-]	2.63E-03

定　数	
$c_x = \Delta Fo/\Delta X^2$ [-]	2.63E-01

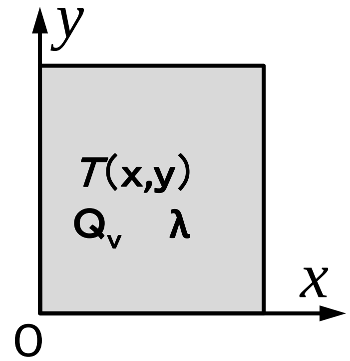


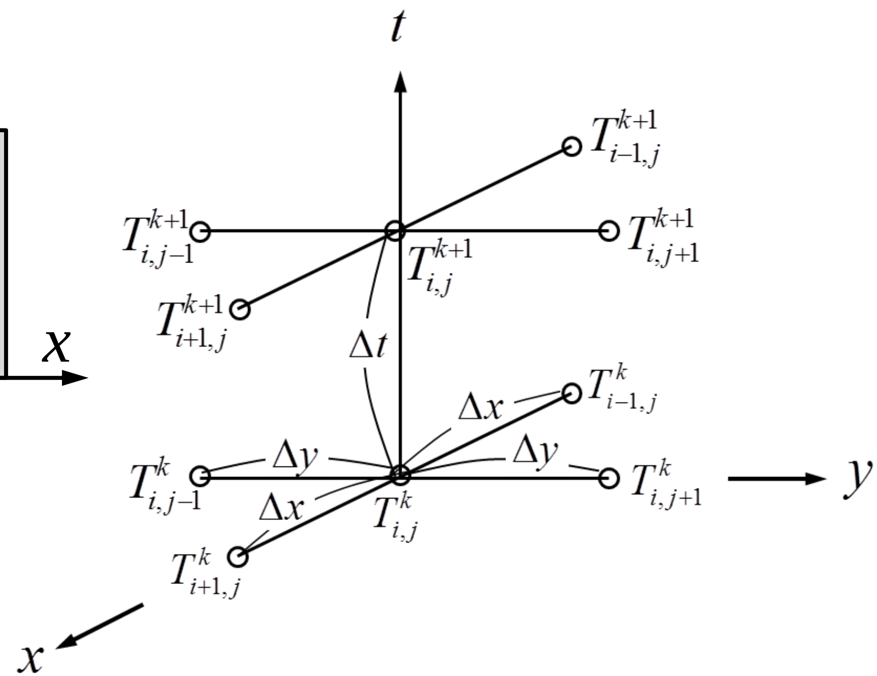
											X [-]
Fo [-]	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.00E+00	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2.63E-03	1.000	0.178	0.032	0.006	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
5.26E-03	1.000	0.302	0.076	0.017	0.004	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
7.89E-03	1.000	0.392	0.123	0.034	0.009	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1.05E-02	1.000	0.458	0.169	0.054	0.016	0.004	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
1.32E-02	1.000	0.509	0.212	0.076	0.025	0.007	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000
1.58E-02	1.000	0.549	0.250	0.099	0.035	0.012	0.004	0.001	0.000	0.000	0.000
1.84E-02	1.000	0.581	0.285	0.122	0.047	0.017	0.006	0.002	0.001	0.000	0.000
2.11E-02	1.000	0.608	0.317	0.145	0.060	0.023	0.008	0.003	0.001	0.000	0.000
2.37E-02	1.000	0.630	0.345	0.167	0.073	0.029	0.011	0.004	0.001	0.000	0.000
2.63E-02	1.000	0.649	0.370	0.188	0.087	0.037	0.014	0.005	0.002	0.001	0.000
2.89E-02	1.000	0.666	0.393	0.209	0.100	0.044	0.018	0.007	0.003	0.001	0.000
3.16E-02	1.000	0.680	0.414	0.228	0.114	0.053	0.023	0.009	0.003	0.001	0.000

非定常二次元

基礎方程式

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\left(\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{d^2T}{dy^2}\right) + \frac{Q_v}{\rho c} \qquad a = \frac{\lambda}{\rho c}$$





陽解法

$$T_{i,j}^{k+1} = c_x(T_{i+1,j}^k + T_{i-1,j}^k) + c_y(T_{i,j+1}^k + T_{i,j-1}^k) + (1 - 2c_x - 2c_y)T_{i,j}^k + c_q Q_v$$

ここで、$c_x = \dfrac{a\Delta t}{\Delta x^2} \quad c_y = \dfrac{a\Delta t}{\Delta y^2} \quad c_q = \dfrac{\Delta t}{\rho c}$

陰解法

$$T_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{1 + 2c_x + 2c_y}\left\{c_x(T_{i+1,j}^{k+1} + T_{i-1,j}^{k+1}) + c_y(T_{i,j+1}^{k+1} + T_{i,j-1}^{k+1}) + T_{i,j}^k + c_q Q_v\right\}$$

ここで、$a = \dfrac{\lambda}{\rho c} \quad c_x = \dfrac{a\Delta t}{\Delta x^2} \quad c_y = \dfrac{a\Delta t}{\Delta y^2} \quad c_q = \dfrac{\Delta t}{\rho c}$